ගණිතය

11 ශ්‍රේණිය

I කොටස

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව



සියලු ම පෙළපොත් ඉලෙක්ට්‍රොනික් මාධ්‍යයෙන් ලබා ගැනීමට www.edupub.gov.lk වෙබ් අඩවියට පිවිසෙන්න.

පළමුවන මුද්‍රණය 2015
දෙවන මුද්‍රණය 2016
තුන්වන මුද්‍රණය 2017
හතරවන මුද්‍රණය 2018
පස්වන මුද්‍රණය 2019

ISBN 978-955-25-0409-9

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
පානළුව, පාදුක්ක පිහිටි රජයේ මුද්‍රණ නීතිගත සංස්ථාවේ
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත්කරන ලදි.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා
ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා
අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා
පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා
නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
ඔබ වේ අප විද්‍යා ඔබ ම ය අප සත්‍යා
ඔබ වේ අප ශක්ති අප හද තුළ භක්ති
ඔබ අප ආලෝකේ අපගේ අනුප්‍රාණේ
ඔබ අප ජීවන වේ අප මුක්තිය ඔබ වේ
නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා
ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා
එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා
යමු යමු වී නොපමා
ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

අපි වෙමු එක මවකගෙ දරුවෝ
එක නිවසෙහි වෙසෙනා
එක පාටැති එක රුධිරය වේ
අප කය තුළ දුවනා

එබැවිනි අපි වෙමු සොයුරු සොයුරියෝ
එක ලෙස එහි වැඩෙනා
ජීවත් වන අප මෙම නිවසේ
සොඳින සිටිය යුතු වේ

සැමට ම මෙත් කරුණා ගුණෙනී
වෙළී සමගි දමිනී
රන් මිණි මුතු නො ව එය ම ය සැපතා
කිසි කල නොම දිරනා

ආනන්ද සමරකෝන්



"අලුත් වෙමින්, වෙනස් වෙමින්, නිවැරැදි දැනුමෙන්
රටට වගෙ ම මුළු ලොවට ම වෙන්න නැණ පහන්"

<u>ගරු අධ්‍යාපන අමාත්‍යතුමාගේ පණිවුඩය</u>

ගෙවී ගිය දශක දෙකකට ආසන්න කාලය ලෝක ඉතිහාසය තුළ සුවිශේෂී වූ තාක්ෂණික වෙනස්කම් රැසක් සිදුවූ කාලයකි. තොරතුරු තාක්ෂණය, සන්නිවේදනය ප්‍රමුඛ කරගත් සෙසු ක්ෂේත්‍රවල ශීඝ්‍ර දියුණුවත් සමඟ වත්මන් සිසු දරු දැරියන් හමුවේ නව අභියෝග රැසක් නිර්මාණය වී තිබේ. අද සමාජයේ පවතින රැකියාවල ස්වභාවය නුදුරු අනාගතයේ දී සුවිශේෂී වෙනස්කම් රැසකට ලක් වනු ඇත. එවන් වටපිටාවක් තුළ නව තාක්ෂණික දැනුම සහ බුද්ධිය කේන්ද්‍ර කරගත් සමාජයක වෙනස් ආකාරයේ රැකියා අවස්ථා ද ලක්ෂ ගණනින් නිර්මාණය වනු ඇත. ඒ අනාගත අභියෝග ජයගැනීම වෙනුවෙන්, ඔබ සවිබල ගැන්වීම අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මගේත්, අප රජයේත් ප්‍රමුඛ අරමුණයි.

නිදහස් අධ්‍යාපනයේ මාහැඟි ප්‍රතිලාභයක් ලෙස නොමිලේ ඔබ අතට පත් වන මෙම පොත මනාව පරිශීලනය කිරීමත්, ඉන් අවශ්‍ය දැනුම උකහා ගැනීමත් ඔබේ ඒකායන අරමුණ විය යුතු ය. එමෙන් ම ඔබේ මවුපියන් ඇතුළු වැඩිහිටියන්ගේ ශ්‍රමයේ සහ කැපකිරීමේ ප්‍රතිඵලයක් ලෙස රජය විසින් නොමිලේ පාසල් පෙළපොත් ඔබ අතට පත් කරනු ලබන බව ද ඔබ වටහා ගත යුතු ය.

ලෝකය වේගයෙන් වෙනස් වන වටපිටාවක, නව ප්‍රවණතාවලට ගැළපෙන අයුරින් නව විෂය මාලා සකස් කිරීමටත්, අධ්‍යාපන පද්ධතිය තුළ තීරණාත්මක වෙනස්කම් සිදු කිරීම සඳහාත් රජයක් ලෙස අප කටයුතු කරන්නේ රටක අනාගතය අධ්‍යාපනය මතින් සිදු වන බව අප හොඳින් ම අවබෝධ කරගෙන සිටින බැවිනි. නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල භුක්ති විඳිමින්, රටට පමණක් නොව ලොවට ම වැඩදායී ශ්‍රී ලාංකික පුරවැසියකු ලෙස නැඟී සිටින්නට ඔබ ද අදිටන් කරගත යුතු වන්නේ එබැවිනි. ඒ සඳහා මේ පොත පරිශීලනය කිරීමෙන් ඔබ ලබන දැනුම ද ඉවහල් වනු ඇති බව මගේ විශ්වාසයයි.

රජය ඔබේ අධ්‍යාපනය වෙනුවෙන් වියදම් කරන අතිවිශාල ධනස්කන්ධයට වටිනාකමක් එක් කිරීම ද ඔබේ යුතුකමක් වන අතර, පාසල් අධ්‍යාපනය හරහා ඔබ ලබා ගන්නා දැනුම හා කුසලතා ඔබේ අනාගතය තීරණය කරන බව ද ඔබ හොඳින් අවබෝධ කර ගත යුතු ය. ඔබ සමාජයේ කුමන තරාතිරමක සිටිය ද සියලු බාධා බිඳ දමමින් සමාජයේ ඉහළ ම ස්තරයකට ගමන් කිරීමේ හැකියාව අධ්‍යාපනය හරහා ඔබට හිමි වන බව ද ඔබ හොඳින් අවධාරණය කර ගත යුතු ය.

එබැවින් නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල ලබා, ගෞරවනීය පුරවැසියකු ලෙස ඔබට හෙට ලොව දිනන්නටත් දේශ දේශාන්තරවල පවා ශ්‍රී ලාංකේය නාමය බබළවන්නටත් හැකි වේවා! යි අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මම ශුභ ප්‍රාර්ථනය කරමි.

අකිල විරාජ් කාරියවසම්

අධ්‍යාපන අමාත්‍ය

පෙරවදන

ලෝකයේ ආර්ථික, සමාජීය, සංස්කෘතික හා තාක්ෂණික සංවර්ධනයත් සමඟ අධ්‍යාපන අරමුණු වඩා සංකීර්ණ ස්වරූපයක් ගනී. මිනිස් අත්දැකීම්, තාක්ෂණික වෙනස්වීම්, පර්යේෂණ සහ නව දර්ශක ඇසුරෙන් ඉගෙනීමේ හා ඉගැන්වීමේ ක්‍රියාවලිය ද නවීකරණය වෙමින් පවතියි. එහිදී ශිෂ්‍ය අවශ්‍යතාවලට ගැළපෙන ලෙස ඉගෙනුම් අත්දැකීම් සංවිධානය කරමින් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය පවත්වාගෙන යාම සඳහා විෂය නිර්දේශයේ දැක්වෙන අරමුණුවලට අනුකූලව, විෂයානුබද්ධ කරුණු ඇතුළත්ව පෙළපොත සම්පාදනය වීම අවශ්‍ය ය. පෙළපොත යනු ශිෂ්‍යයාට ඉගෙනීමේ උපකරණයක් පමණක් නොවේ. එය ඉගෙනුම් අත්දැකීම් ලබා ගැනීමටත් නැණ ගුණ වර්ධනයටත් චර්යාමය හා ආකල්පමය වර්ධනයක් සහිතව ඉහළ අධ්‍යාපනයක් ලැබීමටත් ඉවහල් වන ආශීර්වාදයකි.

නිදහස් අධ්‍යාපන සංකල්පය යථාර්ථයක් බවට පත්කරමින් 1 ශ්‍රේණියේ සිට 11 ශ්‍රේණිය දක්වා සියලු ම පෙළපොත් රජයෙන් ඔබට තිළිණ කෙරේ. එම ග්‍රන්ථවලින් උපරිම ඵල ලබන අතර ම ඒවා රැක ගැනීමේ වගකීම ද ඔබ සතු බව සිහිපත් කරමි. පූර්ණ පෞරුෂයකින් හෙබි, රටට වැඩදායී යහපත් පුරවැසියකු වීමේ පරිචය ලබා ගැනීමට මෙම පෙළපොත ඔබට උපකාරී වෙතැයි මම අපේක්ෂා කරමි.

මෙම පෙළපොත් සම්පාදනයට දායක වූ ලේඛක, සංස්කාරක හා ඇගයුම් මණ්ඩල සාමාජික මහත්ම මහත්මීන්ටත් අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයටත් මාගේ ස්තුතිය පළ කර සිටිමි.

ඩබ්ලිව්. එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව,
ඉසුරුපාය,
බත්තරමුල්ල.
2019.04.10

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

ඩබ්ලිව්.එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක මයා - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි මිය - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සංස්කාරක මණ්ඩලය

ආචාර්ය ඩී.කේ. මල්ලව ආරච්චි මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය

ආචාර්ය රොමේන් ජයවර්ධන මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය

ආචාර්ය ශ්‍රී ධරන් මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය

බී.ඩී. චිත්තානන්ද බියන්විල මයා - අධ්‍යක්ෂ, ගණිතය අංශය, අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

ජී.පී.එච්. ජගත් කුමාර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

එච්.එම්.ඒ. ජයසේන මයා - ගුරු උපදේශක, (විශ්‍රාමික)

වයි.වී.ආර්. විතාරම මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, දෙහිඕවිට

ඩබ්.එම්.ඩබ්.සී වලිසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, කෑගල්ල

අජිත් රණසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හෝමාගම

අනුර ඩී. වීරසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, (පිරිවෙන්), මාතර දිස්ත්‍රික්කය

ඩබ්ලිව්.එම්.ඩී. ලාල් විජේකාන්ත මයා - ගුරු සේවය, ශාන්ත තෝමස් විද්‍යාලය, ගල්කිස්ස

ආචාර්ය රෝචනා මීගස්කුඹුර මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, පේරාදෙණිය විශ්වවිද්‍යාලය

ආචාර්ය ජේ. රත්නායක මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය

ආචාර්ය ජයන්ත සේනාධීර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය

ආචාර්ය ආර්. ටී. සමරතුංග මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය

අයි.එන්. වාගීෂමූර්ති මයා - අධ්‍යක්ෂ, (විශ්‍රමික)

ආර්.එස්.ඊ. පුෂ්පරාජන් මයා - සහකාර අධ්‍යක්ෂ,කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, පුත්තලම

වී. මුරලි මයා - ගුරු අධ්‍යාපනඥ සේවය, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය,වවුනියාව

භාෂා සංස්කරණය

ජයත් පියදසුන් මයා - මාධ්‍යවේදී, කර්තෘ මණ්ඩලය - සිළුමිණ

සෝදුපත් කියවීම

ඩී.යූ. ශ්‍රීකාන්ත එදිරිසිංහ මයා - ගුරු සේවය, ගොඩගම සුභාරතී මහාමාත්‍ය මහා විද්‍යාලය,

රූපසටහන් පිටකවර නිර්මාණය පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය

ආර්.ඩී. තිළිණි සෙව්වන්දි මෙය
බී.ටී. චතුරාණි පෙරේරා මිය - පරිගණක සහායක, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්පාදක මණ්ඩල සටහන

2015 වර්ෂයේ සිට ක්‍රියාත්මක වන නව විෂය නිර්දේශයට අනුකූලව මෙම පෙළපොත රචනා කර ඇත.

පෙළපොත සම්පාදනය කෙරෙන්නේ සිසුන් වෙනුවෙනි. එබැවින්, ඔබට තනිව කියවා වුව ද තේරුම් ගත හැකි පරිදි සරල ව සහ විස්තරාත්මක ව එය රචනා කිරීමට උත්සාහ ගත්තෙමු.

විෂය සංකල්ප ආකර්ශනීය අන්දමින් ඉදිරිපත් කිරීම සහ තහවුරු කිරීම සඳහා, විස්තර කිරීම්, ක්‍රියාකාරකම්, සහ නිදසුන් වැනි විවිධ ක්‍රම අනුගමනය කළෙමු. තව ද, අභ්‍යාස කිරීමේ රුචිකත්වය වර්ධනය වන පරිදි ඒවා සරල සිට සංකීර්ණ දක්වා අනුපිළිවෙළින් පෙළ ගස්වා තිබේ.

ගණිත විෂයයට අදාළ සංකල්ප දැක්වෙන පද, රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුව සම්පාදනය කරන ගණිතය පාරිභාෂික පදමාලාවට අනුකූලව භාවිත කළෙමු.

විෂය නිර්දේශයේ 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් ඉගෙන ගැනීමට මින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගත් යම් යම් විෂය කරුණු අවශ්‍ය වේ. එබැවින් එම පෙර දැනුම සිහි කිරීම පිණිස පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස සෑම පරිච්ඡේදයකම ආරම්භයේ දැක්වෙයි. ඒවා මගින් 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් සඳහා ඔබව සූදානම් කෙරෙනු ඇත.

ඊට අමතරව 10 ශ්‍රේණියෙහි පෙළපොත සිසුන් ළඟ තිබෙන බැවින් පෙර දැනුම අවශ්‍ය වන විටදී එය ද භාවිතයට ගනු ඇතැයි අපි බලාපොරොත්තු වෙමු.

පන්තියේ දී ගුරුවරයා විසින් ඉගැන්වීමට පෙර, ඔබ මේ පරිච්ඡේද කියවීමෙන් සහ ඒ ඒ පරිච්ඡේදයේ එන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස කිරීමෙන්, මේ පොත භාවිතයෙන් උපරිම ඵල ලැබිය හැකි ය.

ගණිත අධ්‍යාපනය ප්‍රීතිමත් සහ ඵලදායක වන්නැයි අපි ප්‍රාර්ථනා කරමු.

සම්පාදක මණ්ඩලය

පටුන

1 තාත්වික සංඛ්‍යා

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- සංඛ්‍යා කුලක විශ්ලේෂණය කිරීමට
- කරණි ආශ්‍රිත ව මූලික ගණිත කර්ම හැසිරවීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

1.1 සංඛ්‍යා වර්ගීකරණය

සංඛ්‍යා පිළිබඳ සංකල්පය මානව වර්ගයා තුළ ජනිත වූයේ මීට වසර 30 000කට පමණ පෙර යැයි විශ්වාස කෙරේ. විවිධ ශිෂ්ටාචාර තුළ ස්වාධීන ව උත්පත්තිය හා වර්ධනය සිදු වූ මෙම සංකල්පය මුළු ලොව පුරා විකසනය වී, අද වන විට 'ගණිතය' නමැති පොදු විශ්වීය විෂය ක්ෂේත්‍රයක් බවට පත් ව ඇත.

මුල් අවධියෙහි දී ශිෂ්ටාචාර තුළ සංඛ්‍යා යොදා ගන්නට ඇත්තේ ගණන් කිරීම හා ගණන් තැබීම වැනි සරල කටයුතු සඳහා යැයි සිතිය හැකි ය. මුලින් ම පහළ වූ සංඛ්‍යාමය සංකල්ප "එක" හා "දෙක" බවට සැක නැත. ඉන් පසු එය, "තුන", "හතර" යනාදි ලෙස වර්ධනය වන්නට ඇත. මේ ආකාරයට තමන් "කැමති ප්‍රමාණයක්" නම් කිරීමට හැකි බව ද පසු කලෙක දී අවබෝධ කර ගන්නට ඇත. මෙම නම් කිරීම සඳහා විවිධ ශිෂ්ටාචාර තුළ විවිධ සංකේත යොදාගැනිණි.

ඓතිහාසික සාක්ෂි අනුව, අද අප භාවිත කරන 1, 2, 3 ආදි සංඛ්‍යාංක භාවිතයෙහි ආරම්භය ඉන්දියාව ලෙස පිළිගැනේ. එපමණක් නොව, ශූන්‍යය නමැති සංකල්පය සංඛ්‍යාවක් ලෙස භාවිත කිරීමේත් ස්ථානීය අගය මත පදනම් වූ සංඛ්‍යා පද්ධතියක් නිර්මාණය කිරීමේත් ගෞරවය ඉන්දියාවට හිමි වේ. මෙම සංඛ්‍යා පද්ධතිය හින්දු - අරාබි සංඛ්‍යා පද්ධතිය ලෙස අද හැඳින්වෙන අතර එහි භාවිතය වෙළෙඳුන් මාර්ගයෙන් මැද පෙරදිගටත්, එතැනින් යුරෝපයටත් පැතිරුණු බව නූතන පිළිගැනීම යි. වර්තමානය වන විට මෙම සංඛ්‍යා පද්ධතිය සම්මත පොදු සංඛ්‍යා පද්ධතිය ලෙස මුළු ලොවෙහි ම පිළිගැනේ.

සංඛ්‍යා භාවිතයට අදාළ ව මිනිස් පරිණාමයේ සිදු වූ මහත් පෙරළියක් ලෙස, සංඛ්‍යා භාවිතයෙන් මූලික ගණිත කර්ම සිදු කිරීම (එකතු කිරීම, අඩු කිරීම, ගුණ කිරීම හා බෙදීම) දැක්විය හැකි ය. අද වැනි තාක්ෂණික ලෝකයක සංඛ්‍යා හා ඒ මත සිදු කෙරෙන ගණිත කර්මවලින් තොර මානව පැවැත්මක් පිළිබඳ සිතා ගැනීමට පවා අසීරු ය.

මානව අවශ්‍යතා සඳහා මුලින් ම යොදා ගැනුණු සංඛ්‍යා ලෙස 1, 2, 3 යනාදිය දැක්විය හැකි වුවත් පසු කලෙක දී ශූන්‍යය, භාග සංඛ්‍යා හා ඍණ සංඛ්‍යා ද ඊට ඇතුළත් විය. ගණිතය වෙනම ම විෂයක් ලෙස දියුණු වෙමින් පවතින කාලයේ දී තවත් විවිධාකාරයේ සංඛ්‍යා වර්ග (කුලක) පිළිබඳව ගණිතඥයන්ගේ අවධානය යොමු විය. මෙම පාඩම තුළ දී අප බලාපොරොත්තු වන්නේ එවැනි විවිධ සංඛ්‍යා කුලක පිළිබඳවත් ඒවායේ අංකන ක්‍රම හා ගුණ පිළිබඳවත් ඉගෙනීමට ය.

නිඛිල කුලකය ($\mathbb{Z}$)

ස්වභාවයෙන් ම, අප මුලින් ම හඳුනාගන්නේ 1, 2, 3, ... ලෙස අප කුඩා කල මුලින් ම ඉගෙනගත් සංඛ්‍යා ය. මෙම සංඛ්‍යා **ගණින සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වෙන අතර, ඒවා සියල්ල අඩංගු කුලකය, කුලක අංකනයෙන් මෙසේ ලියනු ලැබේ.

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

ගණින සංඛ්‍යා යන නම ලැබීමට හේතුව ඉතා පැහැදිලි ය. එසේ නමුත්, නූතන ගණිත ව්‍යවහාරයේ මෙම නම භාවිත වන්නේ විරල වශයෙනි. මෙම කුලකය සඳහා බොහෝ විට භාවිත වන නම වන්නේ "**ධන නිඛිල කුලකය**" යන්න යි. එම කුලකය $\mathbb{Z}^+$ මගින් අංකනය කෙරේ. එනම්,

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

මේ අනුව, 1, 2, 3, ... සංඛ්‍යාවලට ධන නිඛිල යැයි කියනු ලැබේ.

ඍණ නිඛිල ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ $-1, -2, -3, ...$ ආදි සංඛ්‍යා ය. මෙම කුලකය අංකනය කිරීම සඳහා සුලභව යෙදෙන සංකේතයක් නොමැති වුවත් සමහර ගණිතඥයන් විසින්, තම විෂය ක්ෂේත්‍රයේ අවශ්‍යතා අනුව, ඒ සඳහා $\mathbb{Z}^-$ යන සංකේතය භාවිත කෙරේ.

නිඛිල ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ධන නිඛිල, ශූන්‍යය හා ඍණ නිඛිල යන සියලු සංඛ්‍යා ය. එම කුලකය $\mathbb{Z}$ මගින් අංකනය කෙරේ. මේ අනුව,

$$\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

ලෙස හෝ

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$$

ලෙස අංකනය කළ හැකි ය.

ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා කුලකය (N)

මීළඟට අප නැවතත් 1, 2, 3, ... ආදි වශයෙන් වූ සංඛ්‍යා කුලකය සලකමු. මෙම සංඛ්‍යා කුලකය **ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා** කුලකය ලෙස ද හැඳින්වෙන අතර, එය $\mathbb{N}$ මගින් අංකනය කෙරේ. එනම්,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

සටහන: ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස සලකනු ලබන්නේ කුමන සංඛ්‍යා දැයි යන්න පිළිබඳව ගණිතඥයන් අතර පොදු එකඟතාවක් නොමැත. ප්‍රකෘති යන්නෙහි අදහස "ස්වාභාවික" යන්න යි; ඒ අනුව, ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා යන යෙදුම 1, 2, 3, ... ආදි සංඛ්‍යා සඳහා යෝග්‍ය

බව පෙනේ. එහෙත්, සමහර ගණිතඥයන් විසින් (විශේෂයෙන්, කුලකවාදය පිළිබඳ විශේෂඥයන්) තම පොත්පත්වල, යම් හේතුන් නිසා, 0 ද ප්‍රකෘති සංඛ්‍යාවක් ලෙස සලකන ලදි. ශූන්‍ය හා ධන නිඛිල අඩංගු කුලකය අංකනය කිරීම සඳහා ඒ වන විට පිළිගත් නමක් හා සංකේතයක් නොතිබීම ද එයට හේතු වූවා විය හැකි ය. එහෙත් සංඛ්‍යාවාදය පිළිබඳ ව ලියැවුණු පොත්වල බොහෝ විට ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස 1, 2, 3, ... සංඛ්‍යා කුලකය සලකන බව පෙනේ. කෙසේ නමුත්, අද කාලයේ ලියැවෙන සෑම පොතපතක ම පාහේ කර්තෘන් විසින් තමන් ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා ලෙස සලකනු ලබන්නේ කුමන සංඛ්‍යා ද යන්න මුලින් ම සඳහන් කෙරේ.

පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{Q}$)

නිඛිල මෙන් ම භාග ද සංඛ්‍යා ලෙස සැලකිය හැකි බවත් භාග සඳහා ද එකතු කිරීම, ගුණ කිරීම ආදී ගණිත කර්ම සිදු කළ හැකි බවත් අපි දැක ඇත්තෙමු. සෑම නිඛිලයක් ම ද භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ලිවිය හැකි ය (නිදසුනක් ලෙස $2 = \frac{2}{1}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය). එසේ ම, එක ම සංඛ්‍යාත්මක අගය සහිත භාග වෙනස් ආකාරවලින් ලිවිය හැකි ය (නිදසුනක් ලෙස $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$). ඍණ භාග ද අපි දැක ඇත්තෙමු ($-\frac{2}{5}$, $-\frac{11}{3}$ ආදිය). අප සාමාන්‍යයෙන් භාග සංඛ්‍යාවක හරයේ හා ලවයේ නිඛිල තිබිය යුතු යැයි සිතා සිටියත් එය එසේ නොවේ. නිදසුනක් ලෙස, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ යන්න ද භාග සංඛ්‍යාවකි. එහෙත්, හරයේ හා ලවයේ **නිඛිල සහිත භාග** (හරයේ 0 නොමැති විට) ගණිතයේ දී විශේෂ වැදගත්කමක් ගන්නා අතර, එම සංඛ්‍යා **පරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වේ. එම සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}$ මගින් අංකනය කෙරේ. කුලක ජනන ආකාරය යොදා ගනිමින්, පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය මෙසේ අර්ථ දැක්විය හැකි ය:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ හා } b \neq 0 \right\}.$$

පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය අර්ථ දැක්විය හැකි තවත් ආකාර ද පවතී. ඉන් එක් ආකාරයක් නම්,

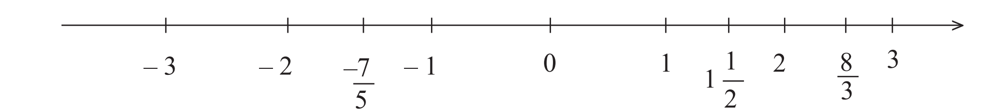
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^{+} \right\}.$$

මෙම අර්ථ දැක්වීම් දෙක ම එකිනෙකට තුල්‍ය වේ. එයට හේතුව (පරිමේය සංඛ්‍යාවක හරයේ 0 තිබිය නොහැකි නිසාත්, ඍණ පරිමේය සංඛ්‍යා සියල්ල ලවයේ ඍණ නිඛිලවලින් ලැබෙන නිසාත් ය.

අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{Q}'$)

දැන්, අපරිමේය සංඛ්‍යා යනු මොනවාදැයි හඳුනා ගනිමු. අප මීට ඉහත වසරවල දී සංඛ්‍යා රේඛාවක් ඇඳ සංඛ්‍යා පිළිබඳ ඉගෙනගත් ආකාරය ඔබට මතක ද? ඒ පිළිබඳ ව නැවතත් මතක් කර ගනිමු.

දෙපසට ම අවශ්‍ය තරම් දික් කළ හැකි සරල රේඛාවක් සලකමු. එම රේඛාව මත කැමති ලක්ෂ්‍යයක් 0 ලෙස නම් කරමු. එම 0න් එක් පසක (සාමාන්‍යයෙන් දකුණු පසින්) සමාන දුරින් 1, 2, 3, ... ආදි සියලු ධන නිඛිලවලට අදාළ ලක්ෂ්‍යත් අනෙක් පස – 1, – 2, – 3, ... ආදි සියලු ඍණ නිඛිලවලට අදාළ ලක්ෂ්‍යත් ලකුණු කර ඇතැයි සිතමු. එනම්, නිඛිල සියල්ල මෙම රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යවලින් දක්වා ඇත. ඉන් පසු සියලු පරිමේය සංඛ්‍යාවලට අදාළ ලක්ෂ්‍ය ද මෙම රේඛාව මත ලකුණු කළේ යැයි සිතමු. පහත රූපයේ එසේ ලකුණු කළ ලක්ෂ්‍ය ගණනාවක් දැක්වේ.



ඒ අනුව, මෙම රේඛාව මත සියලු පරිමේය සංඛ්‍යා (නිඛිල ද ඇතුළුව) ලකුණු කොට අවසන්ව ඇත. දැන් රේඛාව මත සෑම ලක්ෂ්‍යයකට ම අනුරූප සංඛ්‍යාවක් ලකුණු වී ඇතැයි ඔබ සිතනවා ද? වෙනත් අයුරකින් ඇසුව හොත්, රේඛාව ඔස්සේ 0 සිට ඇති සෑම දුරක් ම පරිමේය සංඛ්‍යාවක් ලෙස ලිවිය හැකි යැයි ඔබ සිතනවා ද? ඇත්ත වශයෙන් ම තවත් ලක්ෂ්‍ය ලකුණු නොවී ඉතිරි වී ඇත. එනම්, පරිමේය සංඛ්‍යාවකින් නිරූපණය කළ නොහැකි ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) ද මෙම රේඛාව මත ඉතිරි වී ඇත. මෙම ලකුණු නොවී ඉතිරි වූ ලක්ෂ්‍ය වන්නේ, a හා b නිඛිල වන, $\frac{a}{b}$ ආකාරයෙන් ලිවීමට **නොහැකි** ලක්ෂ්‍ය බව පැහැදිලි ය. එසේ ලකුණු නොවී ඉතිරි වූ ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) **අපරිමේය සංඛ්‍යා** ලෙස හැඳින්වේ.

අපරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය නිරූපණය කිරීම සඳහා වෙන ම සංකේතයක් නොමැති අතර, එය සාමාන්‍යයෙන් $\mathbb{Q}$ හි අනුපූරක කුලකය වන $\mathbb{Q}'$ මගින් දැක්වේ.

අපරිමේය සංඛ්‍යා සඳහා උදාහරණ ලෙස, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ යනාදි සංඛ්‍යා දැක්විය හැකි ය.

ඇත්ත වශයෙන් ම පූර්ණ වර්ගයක් නොවන ඕනෑ ම ධන නිඛිලයක වර්ගමූලය අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වේ. මේ හැර, ඕනෑ ම වෘත්තයක පරිධිය එහි විෂ්කම්භයට දරන අනුපාතය වන π යන්න ද අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව ගණිතඥයන් විසින් ඔප්පු කර ඇත. π හි අගය $\frac{22}{7}$ ලෙස ගනු ලබන්නේ ගණනය කිරීමේ පහසුව තකා ආසන්න අගයක් ලෙස ය.

තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය ($\mathbb{R}$)

ඉහත සාකච්ඡාවට අනුව, සංඛ්‍යා රේඛාව මත පිහිටි සියලු ලක්ෂ්‍ය පරිමේය සංඛ්‍යා හෝ අපරිමේය සංඛ්‍යා ලෙස නිරූපණය කළ හැකි ය. මෙම පරිමේය හා අපරිමේය සංඛ්‍යා සියල්ලම, එනම් රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය (සංඛ්‍යා) සියල්ලටම පොදුවේ **තාත්වික සංඛ්‍යා** යැයි කියනු ලැබේ. එම තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{R}$ මගින් අංකනය කෙරේ.

සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය

ඕනෑ ම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් දශම නිරූපණයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම, නිදසුනක් ලෙස පරිමේය සංඛ්‍යා කිහිපයක දශම නිරූපණය බලමු.

1. **පරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය**

$$4 = 4.000\ ...$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ ...$$

$$\frac{11}{8} = 1.375 = 1.375000\ ...$$

$$\frac{211}{99} = 2.131313...$$

$$\frac{767}{150} = 5.11333...$$

$$\frac{37}{7} = 5.285714285714285714\ ...$$

මෙම දශම නිරූපණවලට ඇති පොදු ගුණයක් නම් දශම තිතෙන් යම් අවස්ථාවකට පසු (හෝ මුල සිට ම) එක ම සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක් (හෝ එක් සංඛ්‍යාංකයක්) සමාවර්තනය වීම යි.

සමාවර්තනය වීම යනු සම දුරින් නැවත නැවත යෙදීම යි.

නිදසුන් ලෙස, 4 හි 0 සංඛ්‍යාංකය පළමු දශමස්ථානයේ සිට ම සමාවර්තනය වේ; $\frac{1}{2}$ හි දශම නිරූපණයෙහි 0 සංඛ්‍යාංකය දෙවන දශමස්ථානයේ සිට සමාවර්තනය වේ; $\frac{211}{99}$ හි 13 සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩය මුල සිට ම සමාවර්තනය වේ; $\frac{37}{7}$ හි 285714 සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩය මුල සිට ම සමාවර්තනය වේ. මෙම ගුණය, එනම්: යම් සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක් (හෝ කට්ටියක්) අඛණ්ඩව සමාවර්තනය වීම සෑම පරිමේය සංඛ්‍යාවකට ම පොදු ගුණයකි. මෙසේ සමාවර්තනය වන කොටස 0 නම්, එවැනි දශම **අන්ත දශම** ලෙස හැඳින්වෙන අතර, සමාවර්ත වන කොටස 0 නොවන දශම **සමාවර්ත දශම** ලෙස හැඳින්වේ. ඒ අනුව ඉහත නිදසුනේ ඇති 4, $\frac{1}{2}$ හා $\frac{11}{8}$ **අන්ත දශම** වන අතර, අනෙක්වා සියල්ල **සමාවර්ත දශම** වේ.

මේ අනුව, අපට පහත ප්‍රකාශය කළ හැකි ය:

සෑම පරිමේය සංඛ්‍යාවක් ම අන්ත දශමයක් හෝ සමාවර්ත දශමයක් ලෙස ලිවිය හැකි ය.

පරිමේය සංඛ්‍යා පිළිබඳ අපූරු ප්‍රතිඵලයක් දැන් ඉගෙන ගනිමු. යම් $\frac{a}{b}$ පරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය අන්ත දශමයක් යැයි සිතමු. a හා b හි පොදු සාධක නැතැයි ද ගනිමු. එවිට හරයේ (එනම් b හි) සාධක ලෙස ඇත්තේ 2 හෝ 5 (හෝ 2 හා 5 යන දෙක ම) පමණක් විය යුතු ය. ඒ අනුව, සමාවර්ත දශමයක් වන පරිමේය සංඛ්‍යාවක 2 හා 5 හැර වෙනත් ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් හරයෙහි සාධකයක් ලෙස තිබිය යුතු ම ය.

සමාවර්ත දශම ලිවීමේ දී පහත නිදසුන්වල දැක්වෙන ආකාරයට, සමාවර්තනය වන සංඛ්‍යාංකවලට ඉහළින් තිතක් තබා කැටි කර දක්වනු ලැබේ.

සමාවර්ත දශමය	කැටි කළ ආකාරයෙන් දැක්වීම
12.4444 ...	$12.\dot{4}$
2.131313...	$2.\dot{1}\dot{3}$
5.11333...	$5.11\dot{3}$
5.285714285714285714...	$5.\dot{2}8571\dot{4}$

1.1 අභ්‍යාසය

1. හරය පරීක්ෂා කිරීමෙන් පහත දී ඇති එක් එක් පරිමේය සංඛ්‍යාව අන්ත දශමයක් වේ ද, නැත හොත් සමාවර්ත දශමයක් වේ ද යන්න සඳහන් කරන්න. සමාවර්ත දශම වන භාග, දශම ආකාරයෙන් හා කැටි කළ ආකාරයෙන් දක්වන්න.

a. $\frac{3}{4}$ **b**. $\frac{5}{5}$ **c**. $\frac{5}{9}$ **d**. $\frac{3}{7}$ **e**. $\frac{5}{21}$ **f**. $\frac{7}{32}$

g. $\frac{19}{33}$ **h**. $\frac{13}{50}$ **i**. $\frac{7}{64}$ **j**. $\frac{5}{18}$ **k**. $\frac{15}{128}$ **l**. $\frac{41}{360}$

2. අපරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය

දැන් අපි, අවසාන වශයෙන්, අපරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය සලකා බලමු. අපරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණය තුළ කිසිදු සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක සමාවර්තනයක් සිදු නො වේ. නිදසුනක් ලෙස, $\sqrt{2}$ හි අගය දශමස්ථාන 60ක් දක්වා ගණනය කළ විට මෙසේ ලැබේ.

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679

අපට නිතර හමු වන සංඛ්‍යාවක් වන π ද අපරිමේය සංඛ්‍යාවකි. π හි අගය දශමස්ථාන 60ක් දක්වා ගණනය කළ විට මෙසේ ය:

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944

අපරිමේය සංඛ්‍යා පිළිබඳ ව පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශය කළ හැකි ය:

අපරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණයේ සමාවර්තනය වන සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩ නොමැත.

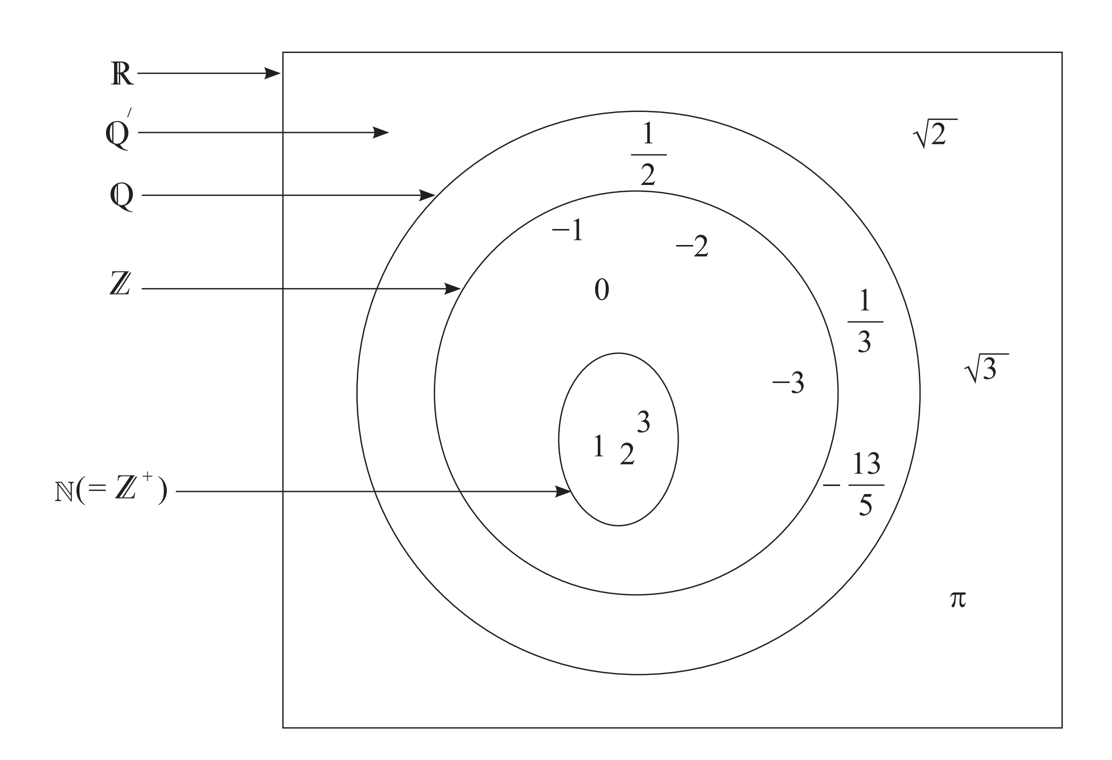
දශම නිරූපණය අන්ත දශමයක් නොවන සංඛ්‍යාවල දශම නිරූපණවලට **අනන්ත දශම නිරූපණ** යැයි කියනු ලැබේ. ඒ අනුව සමාවර්ත දශම සහිත පරිමේය සංඛ්‍යාවලට හා අපරිමේය සංඛ්‍යාවලටත් අනන්ත දශම නිරූපණ ඇත. වෙනත් අයුරකින් පැවසුවහොත්, සමාවර්ත නොවන අනන්ත දශම නිරූපණ ඇත්තේ අපරිමේය සංඛ්‍යාවලට ය.

සටහන: අපරිමේය සංඛ්‍යාවල දශම නිරූපණය පිළිබඳ විස්තර කිරීමේ දී සිදු වන සුලභ දෝෂයක් නම් "අපරිමේය සංඛ්‍යාවක දශම නිරූපණයෙහි කිසිදු රටාවක් නොමැත" යන්න යි. 'රටාව' යන වචනය ගණිතයේ දී හොඳින් අර්ථ දැක්වී නොමැති වීම මෙහි ඇති ගැටලුව යි. නිදසුනක් ලෙස, පහත ලියා ඇති දශම සංඛ්‍යාවට පැහැදිලි රටාවක් ඇත.

$$0.101001000100001000001\ldots$$

එසේ නමුත් මෙය අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වේ. මෙහි සමාවර්තනය වන සංඛ්‍යාංක ඛණ්ඩයක් නොමැති බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය, සර්වත්‍ර කුලකය ලෙස ගෙන, මෙතෙක් උගත් සංඛ්‍යා කුලක සියල්ල, එහි උපකුලක ලෙස පහත දැක්වෙන පරිදි වෙන් රූප සටහනක දැක්විය හැකි ය. තේරුම් ගැනීමේ පහසුව තකා උපකුලක තුළ තිබිය යුතු අවයව කිහිපය බැගින් ද ලියා ඇත.



1.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා පරිමේය ද අපරිමේය ද යන්න නිර්ණය කරන්න.

a. $\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{25}$ **c.** $\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{11}$ **e.** 6.52

2. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශනවල සත්‍ය අසත්‍යතාව නිර්ණය කරන්න.

(a) ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් අන්ත දශමයක් හෝ අනන්ත දශමයක් වේ.
(b) අනන්ත දශම නිරූපණ සහිත පරිමේය සංඛ්‍යා පැවතිය හැකි ය.
(c) ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් සමාවර්ත දශමයක් හෝ අනන්ත දශමයක් වේ.
(d) 0.010110111011110... යන්න පරිමේය සංඛ්‍යාවකි.

1.2 කරණි

ගණිතයේ දී මූල ලකුණ ලෙස හැඳින්වෙන "$\sqrt{}$" යොදා ගනිමින් සංඛ්‍යාත්මක (හා වීජීය) ප්‍රකාශන දැක්වූ අයුරු ඔබට මතක ඇතුවාට සැක නැත. නිදසුනක් ලෙස, $\sqrt{4}$ යන්න "4 හි ධන වර්ගමූලය" ලෙස හැඳින්වූ අතර, එමගින් දැක්වූයේ වර්ග කළ විට 4 ලැබෙන ධන සංඛ්‍යාව යි; එනම් 2 යි. ධන වර්ගමූලය යන්න සරලව වර්ගමූලය ලෙස ද හැඳින් වේ. යම්කිසි x ධන නිඛිලයක වර්ගමූලය වන $\sqrt{x}$ ද ධන නිඛිලයක් වේ නම් එවිට x යනු පරිපූර්ණ වර්ගයක් යැයි කියනු ලැබේ. ඒ අනුව, 4 යනු පරිපූර්ණ වර්ගයකි. $\sqrt{4}$ යන්න 2ට සමාන වේ. එහෙත්, $\sqrt{2}$ යන්න නිඛිලයක් නොවේ. එය ආසන්න වශයෙන් 1.414 බව අපි මීට ඉහත දී දුටුවෙමු. තව ද, $\sqrt{2}$ යනු අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව ද අපි මෙම පාඩමේ දී උගත්තෙමු. මෙම $\sqrt{}$ ලකුණ යොදාගැනෙන, එහෙත් අගය පරිමේය නොවන ප්‍රකාශන **කරණි** ලෙස හැඳින්වේ.
ඇත්ත වශයෙන් ම, $\sqrt{}$ ලකුණ යොදා ගනිමින් වර්ගමූල හැර වෙනත් මූල ද දැක්විය හැකි ය. නිදසුනක් ලෙස, $\sqrt[3]{2}$ මගින් දැක්වෙන්නේ 3 වන බලයට නැංවූ විට 2 ට සමාන වන ධන සංඛ්‍යාව යි. එයට 2හි ඝන මූලය යැයි කියනු ලැබේ. එය ද අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් වන අතර, එහි අගය ආසන්න වශයෙන් 1.2599 වේ (1.2599^3 හි අගය සෙවීමෙන් ඔබට මෙය සනාථ කරගත හැකි ය). මේ ආකාරයෙන් ම, 2හි හතර වන මූලය, 2හි පස් වන මූලය ආදිය ද අර්ථ දැක්විය හැකි ය. වෙනත් ධන සංඛ්‍යා සඳහා ද මෙසේ අර්ථ දැක්වීම් කළ හැකි ය (නිදසුන් ලෙස $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{8.24}$). එවැනි ප්‍රකාශන ද කරණි වේ. එහෙත් අපි මෙම පාඩමේ දී ධන නිඛිලවල වර්ගමූල සහිත කරණි පමණක් සලකා බලමු.

පරිපූර්ණ වර්ගයක් නොවන සංඛ්‍යාවක වර්ගමූලය අන්ත දශමයක් හෝ සමාවර්ත දශමයක් නො වේ. ඒ අනුව කරණි සැමවිට ම අපරිමේය සංඛ්‍යා වේ.

අප මෙහි දී විශේෂයෙන් සලකා බලන්නේ කරණි ආකාරයෙන් ඇති ප්‍රකාශන සුළු කිරීම පිළිබඳව යි. එවැනි සුළු කිරීම් වැදගත් වීමට හේතු ගණනාවක් ඇත. එක් හේතුවක් ලෙස දැක්විය හැක්කේ ගණනය කිරීම පහසු කර ගැනීමයි. නිදසුනක් ලෙස, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ හි අගය

ගණනය කිරීමට ඇති විට, $\sqrt{2}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 1.414 යොදා ගත හොත්, $\frac{1}{1.414}$ හි අගය සෙවීමට සිදු වේ. මෙම බෙදීම තරමක් දීර්ඝය. එහෙත්, පහත දැක්වෙන ආකාරයට සුළු කරමින් ගණනය කිරීම වඩාත් පහසු ය:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$ (භාගයෙහි හරය හා ලවය $\sqrt{2}$ න් ගුණ කිරීමෙන්)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1.414}{2}$$

$$= 0.707.$$

තවත් හේතුවක් ලෙස, ගණනය කිරීමේ දී වන දෝෂ අවම කර ගැනීම දැක්විය හැකි ය. ඒ සඳහා නිදසුනක් ලෙස, $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$ හි අගය සොයමු. මෙහි දී $\sqrt{20}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 4.5 ත් $\sqrt{5}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 2.2 ත් යොදා ගනිමු. එවිට,

$$\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5} = \frac{4.5}{2} - 2.2 = 2.25 - 2.2 = 0.05$$

එහෙත්, මෙම ප්‍රකාශනයේ සැබෑ අගය වන්නේ 0 ය. මෙසේ වෙනස් පිළිතුරක් ලැබීමට එක් හේතුවක් වූයේ $\sqrt{20}$ හා $\sqrt{5}$ සඳහා ආසන්න අගයක් යොදා ගැනීම වුවත්, දී ඇති ප්‍රකාශනය වෙනස් ආකාරයකට සුළු කිරීමෙන් නිවැරදි අගය වන 0 ලබා ගත හැකි ය (අභ්‍යාසයක් ලෙස මෙය යොදා ඇත).

කරණි සහිත ප්‍රකාශන විවිධ ආකාරයෙන් පවතී.

$\sqrt{20}$ ආකාරයේ කරණියක ඇති විශේෂත්වය නම් මුළු සංඛ්‍යාව ම වර්ගමූල ලකුණ තුළ තිබීමයි. එවැනි කරණි, **අඛිල කරණි** ලෙස හැඳින්වේ. $6\sqrt{15}$ ලෙස ලිවීමෙන් අදහස් වන්නේ $6 \times \sqrt{15}$ යන්න යි. එය, කරණියක සහ පරිමේය සංඛ්‍යාවක (1ට අසමාන) ගුණිතය යි. මෙය අඛිල කරණියක් නොවේ.

කරණියක් සරල ම ආකාරයෙන් ඇතැයි කියනු ලබන්නේ එය $a\sqrt{b}$ ආකාරයෙන් ලියා ඇති විට ය; මෙහි a යනු පරිමේය සංඛ්‍යාවක් වන අතර, b හි සාධක ලෙස පූර්ණ වර්ග නොමැති විය යුතු ය. නිදසුනක් ලෙස, $6\sqrt{15}$ යන්න සරල ම ආකාරයෙන් ඇති කරණියක් වන අතර $5\sqrt{12}$ සරල ම ආකාරයෙන් නොමැත; එයට හේතුව, 12හි සාධකයක් ලෙස පූර්ණ වර්ගයක් වන 4 තිබීම යි.

දැන්, විවිධාකාරයෙන් කරණි සහිත ප්‍රකාශන සුළු කළ හැකි අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

$3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$ සුළු කරන්න.

මෙහි දී, $\sqrt{5}$ යන්න අඥාතයක් ලෙස සිතා සුළු කළ හැකි ය. ඒ අනුව,

$3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

මෙය, $3x + 6x = 9x$ ලෙස සුළු කිරීම වැනි ය. මෙම ප්‍රකාශය කරණි ආකාරයෙන් මීට වඩා සුළු කළ නොහැකි බව නිරීක්ෂණය කරන්න. $\sqrt{5}$ සඳහා ආසන්න අගයක් යොදා ගනිමින් සුළු කිරීම කරණි ආකාරයෙන් සුළු කිරීමක් නොවන වග මතක තබා ගන්න.

මතක තබා ගත යුතු තවත් වැදගත් කරුණක් වන්නේ $3\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ ආකාරයේ ප්‍රකාශන කරණි ලෙස මීට වඩා සුළු කළ නොහැකි බව යි.

දැන්, දර්ශක පිළිබඳ ගුණ භාවිතයෙන් කරණි සහිත ප්‍රකාශන සුළු කරන ආකාරය නිදසුන් මගින් සලකා බලමු.

නිදසුන 2

$\sqrt{20}$ අබිල කරණිය, සරල ම ආකාරයෙන් (කරණියක් ලෙස) දක්වන්න.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$$
$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} \quad (\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ නිසා})$$
$$= 2 \times \sqrt{5}$$
$$= \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$$

නිදසුන 3

$4\sqrt{5}$ කරණිය, අබිල කරණියක් ලෙස දක්වන්න.

$$4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} \quad (4 = \sqrt{16} \text{ නිසා})$$
$$= \sqrt{16 \times 5}$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{80}}}$$

දැන් කරණිවල ගුණ කිරීම් හා බෙදීම් සිදු කරන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 4

සුළු කරන්න: $5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}$

ගුණ කිරීමේ දී පරිමේය හා අපරිමේය සංඛ්‍යා වෙන වෙන ම ගුණ කරමු.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} &= 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 20 \times \sqrt{3 \times 2} \\ &= \underline{\underline{20\sqrt{6}}} \end{aligned}$$

නිදසුන 5

සුළු කරන්න: $3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{20}$ කරණිය $3\sqrt{4 \times 5}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

තවදුරටත් සුළු කිරීමෙන් $3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ ලෙස ද දැක්විය හැකි ය.

එවිට,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} &= \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

මීළඟට අප විමසා බලන්නේ $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ආකාරයේ ප්‍රකාශන සුළු කරන අයුරු යි. මෙවැනි භාග සඳහා $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ආදිය දැක්විය හැකි ය. මෙවැනි භාගවල හරයේ වර්ගමූල සහිත ප්‍රකාශනයක් ඇත. එම වර්ගමූල සහිත ප්‍රකාශනය වෙනුවට හරයෙහි නිඛිල (හෝ පරිමේය) සංඛ්‍යාවක් ලැබෙන පරිදි ඒවා සකසන අයුරු දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 6

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ සංඛ්‍යාව, හරයෙහි නිඛිලයක් සහිත භාගයක් ලෙස දක්වන්න.

මෙහි දී යොදා ගන්නා උපක්‍රමය නම්, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ හි හරය හා ලවය $\sqrt{2}$ න් ගුණ කිරීම යි.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$$

මෙහි දී සිදු කළ ක්‍රියාවලිය **හරය පරිමේය කිරීම** ලෙස හැඳින්වේ.

දැන් තවත් නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 7

$\frac{a}{\sqrt{b}}$ හි හරය, පරිමේය කරන්න.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a\sqrt{b}}{b}}}$$

දැන් තවත් කරණි සහිත ගැටලුවක් විසඳන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 8

සුළු කරන්න: $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$

$$4\sqrt{63} = 4 \times \sqrt{9 \times 7} = 4 \times 3\sqrt{7}$$

$$= 12\sqrt{7}$$

$$8\sqrt{28} = 8 \times \sqrt{4 \times 7} = 8 \times 2\sqrt{7}$$

$$= 16\sqrt{7}$$

එබැවින් $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$

$$= \underline{\underline{-9\sqrt{7}}}$$

අවසාන වශයෙන් කරණි සහිත වඩාත් සංකීර්ණ ප්‍රකාශනයක් සුළු කරන අයුරු සලකා බලමු.

නිදසුන 9

සුළු කරන්න: $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}} &= \frac{2\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4 \times 3}} \\
&= \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= 7\sqrt{3} - \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\
&= 7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3} \\
&= 7\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{13\sqrt{3}}{2}}}
\end{aligned}
$$

1.3 අභ්‍යාසය

1. මෙම අබිල කරණි, සරල ම ආකාරයෙන් (කරණි ලෙස) ලියන්න.

a. $\sqrt{20}$ **b.** $\sqrt{48}$ **c.** $\sqrt{72}$ **d.** $\sqrt{28}$

e. $\sqrt{80}$ **f.** $\sqrt{45}$ **g.** $\sqrt{75}$ **h.** $\sqrt{147}$

2. මෙම කරණි, අබිල කරණි ලෙස දක්වන්න.

a. $2\sqrt{3}$ **b.** $2\sqrt{5}$ **c.** $4\sqrt{7}$ **d.** $5\sqrt{2}$ **e.** $6\sqrt{11}$

3. සුළු කරන්න.

a. $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

c. $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

d. $6\sqrt{11} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{11} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$

e. $8\sqrt{3} + 7\sqrt{7} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

4. හරය පරිමේය කරන්න.

a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ c. $\frac{5}{\sqrt{7}}$ d. $\frac{12}{2\sqrt{3}}$ e. $\frac{27}{3\sqrt{2}}$

f. $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ g. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ h. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

5. සුළු කරන්න.

a. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$ b. $5\sqrt{11} \times 3\sqrt{7}$ c. $\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{7} \div 2\sqrt{14}$ e. $6\sqrt{27} \div 3\sqrt{3}$ f. $\sqrt{48} \div 5\sqrt{3}$

6. සුළු කරන්න.

a. $2\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{28}$

b. $3\sqrt{63} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{27} + 3\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{128} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt{162} + \frac{4}{\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{99} - 2\sqrt{44} + \frac{110}{\sqrt{44}}$

e. $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$

2 දර්ශක හා ලඝුගණක I

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

දර්ශක හා ලඝුගණක නීති ඇසුරෙන්,

- බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන සුළු කිරීමට
- සමීකරණ විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

දර්ශක

දර්ශක හා ලඝුගණක පිළිබඳ ව ඔබ මෙතෙක් උගත් කරුණු පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. සුළු කර අගය සොයන්න.

a. $2^2 \times 2^3$ **b.** $(2^4)^2$ **c.** 3^{-2}

d. $\dfrac{5^3 \times 5^2}{5^5}$ **e.** $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^6}$ **f.** $(5^2)^2 \div 5^3$

g. $\dfrac{(2^2)^3 \times 2^4}{2^8}$ **h.** $\dfrac{5^{-3} \times 5^2}{5^0}$ **i.** $(5^2)^{-2} \times 5 \times 3^0$

2. සුළු කරන්න.

a. $a^2 \times a^3 \times a$ **b.** $a^5 \times a \times a^0$ **c.** $(a^2)^3$

d. $(x^2)^3 \times x^2$ **e.** $(xy)^2 \times x^0$ **f.** $(2x^2)^3$

g. $\dfrac{2pq \times 3p}{6p^2}$ **h.** $2x^{-2} \times 5xy$ **i.** $\dfrac{(3a)^{-2} \times 4a^2b^2}{2ab}$

3. සුළු කරන්න.

a. $\lg 25 + \lg 4$ **b.** $\log_2 8 - \log_2 4$

c. $\log_5 50 + \log_5 2 - \log_5 4$ **d.** $\log_a 5 + \log_a 4 - \log_a 2$

e. $\log_x 4 + \log_x 12 - \log_x 3$ **f.** $\log_p a + \log_p b - \log_p c$

4. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

a. $\log_5 x = \log_5 4 + \log_5 2$ **b.** $\log_5 4 - \log_5 2 = \log_5 x$

c. $\log_a 2 + \log_a x = \log_a 10$ **d.** $\log_3 x + \log_3 10 = \log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 2$

e. $\lg 5 - \lg x + \lg 8 = \lg 4$ **f.** $\log_x 12 - \log_5 4 = \log_5 3$

2.1 බලයක භාගීය දර්ශක

4හි වර්ගමූලය යන්න මූල ලකුණ ඇසුරෙන් $\sqrt{4}$ ලෙස ද දර්ශක ඇසුරෙන් $4^{\frac{1}{2}}$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

ඒ අනුව $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$ බව පැහැදිලි ය.

තවත් එවැනි අවස්ථාවක් සලකමු. $2 = 2^1$ නිසා

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \times 2 &= 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

2හි තුන් වන බලය 8 වේ. එනම්, 8හි තුන්වන මූලය 2 වේ. එය සංකේත ඇසුරෙන්,

$\sqrt[3]{8} = 2$ හෝ $8^{\frac{1}{3}} = 2$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

එනම් $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$ බව පැහැදිලි ය.

තව ද, a යනු ධන තාත්වික සංඛ්‍යාවක් නම්,

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ද

$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ ද

$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ ද ලෙස දැක්විය හැකි ය.

මේ අනුව මූල ලකුණ හා බලයෙහි දර්ශකය අතර පවතින සම්බන්ධය සාධාරණ වශයෙන් මෙසේ දක්වමු.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

මෙම සම්බන්ධතාව දර්ශක ප්‍රකාශන සුළු කිරීම සඳහා යොදා ගන්නා අයුරු පහත නිදසුන් මගින් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

1. අගය සොයන්න.

(i) $\sqrt[3]{27}$ (ii) $(\sqrt{25})^{-2}$ (iii) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

(i)
$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$$
$$= (3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 3^{3 \times \frac{1}{3}}$$
$$= \underline{\underline{3}}$$

(ii)
$$(\sqrt{25})^{-2} = (25^{\frac{1}{2}})^{-2}$$
$$= \{(5^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-2}$$
$$= (5^{2 \times \frac{1}{2}})^{-2}$$
$$= 5^{-2}$$
$$= \frac{1}{5^2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{25}}}$$

(iii)
$$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$
$$= \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}}$$
$$= \frac{3^{3 \times \frac{1}{3}}}{2^{3 \times \frac{1}{3}}}$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$= \underline{\underline{1\frac{1}{2}}}$$

දර්ශක සහිත වීජීය ප්‍රකාශන සුළු කිරීම සඳහා, දර්ශක නීති යොදා ගන්නා ආකාරය පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් තවදුරටත් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

සුළු කර පිළිතුර ධන දර්ශක සහිතව ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\left(\sqrt{x}\right)^3$ (ii) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

(i)
$$\left(\sqrt{x}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3$$
$$= x^{\frac{1}{2} \times 3}$$
$$= \underline{\underline{x^{\frac{3}{2}}}}$$

(ii)
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= a^{\frac{1}{3} \times -\frac{1}{2}}$$
$$= a^{-\frac{1}{6}}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}}}$$

(iii)
$$\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}} = \frac{1}{(x^{-3})^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{x^{-3 \times \frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}}$$
$$= \underline{\underline{x^{\frac{3}{2}}}}$$

නිදසුන 3

අගය සොයන්න. (i) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

(i) $$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$= \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$$

(ii) $$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{3}{4}}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times -\frac{3}{4}}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$= \frac{27}{8}$$
$$= \underline{\underline{3\frac{3}{8}}}$$

දැන් තරමක් සංකීර්ණ ප්‍රකාශනයක් වන $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \sqrt[5]{32}^{\,3} \times 3^0$ හි අගය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 \times 3^0 = \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^3 \times 1$$
$$= \left(\frac{2^6}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(2^{5\times\frac{1}{5}}\right)^3$$
$$= \frac{2^{6\times\frac{1}{3}}}{5^{3\times\frac{1}{3}}} \times 2^3$$
$$= \frac{2^2}{5} \times 2^3$$
$$= \frac{2^5}{5}$$
$$= \frac{32}{5}$$
$$= \underline{\underline{6\frac{2}{5}}}$$

නිදසුන 4

$\dfrac{\sqrt[3]{343x^{3/2}}}{x}$ සුළු කරන්න.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{343x^{3/2}}}{x} &= \left(343x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x \\ &= 343^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x \\ &= (7^3)^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div x \\ &= 7^1 \times x^{\frac{1}{2}} \div x \\ &= 7 \times x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= 7 \times x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

2.1 අභ්‍යාසය

1. මූල ලකුණ සහිතව ලියන්න.

a. $p^{\frac{1}{3}}$ **b.** $a^{\frac{2}{3}}$ **c.** $x^{-\frac{2}{3}}$

d. $m^{\frac{4}{5}}$ **e.** $y^{-\frac{3}{4}}$ **f.** $x^{-\frac{5}{3}}$

2. ධන දර්ශක සහිතව ලියන්න.

a. $\sqrt{m^{-1}}$ **b.** $\sqrt[3]{x^{-1}}$ **c.** $\sqrt[5]{p^{-2}}$ **d.** $(\sqrt{a})^{-3}$ **e.** $\sqrt[4]{x^{-3}}$

f. $(\sqrt[3]{p})^{-5}$ **g.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$ **h.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$ **i.** $2\sqrt[3]{x^{-2}}$ **j.** $\dfrac{1}{3\sqrt{a^{-5}}}$

3. අගය සොයන්න.

a. $\sqrt{25}$ **b.** $\sqrt[4]{16}$ **c.** $(\sqrt{4}\,)^5$

d. $(\sqrt[3]{27})^2$ **e.** $\sqrt[4]{81^3}$ **f.** $\sqrt[3]{1000^2}$

g. $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ **h.** $\left(\frac{81}{10000}\right)^{\frac{3}{4}}$ **i.** $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{5}{6}}$

j. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **k.** $(0.81)^{\frac{3}{2}}$ **l.** $(0.125)^{-\frac{2}{3}}$

m. $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times 2^0$ **n.** $\left(\frac{9}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$ **o.** $(27)^{1\frac{1}{3}} \times (81)^{-1\frac{1}{4}}$

p. $\left(11\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ **q.** $(0.125)^{-\frac{1}{3}} \times (0.25)^{\frac{3}{2}}$ **r.** $(\sqrt[3]{8}\,)^2 \times \sqrt[4]{16^3}$

4. සුළු කර ධන දර්ශක සහිතව ලියන්න.

a. $\sqrt[3]{a^{-1}} \div \sqrt[3]{a}$ **b.** $\sqrt[5]{a^{-3}} \div \sqrt[5]{a^7}$ **c.** $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-3}}$

d. $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[6]{x^{-5}}$ **e.** $\left\{\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right\}^{\frac{-1}{2}}$ **f.** $\left(\sqrt{x^2y^2}\right)^{-6}$

g. $\sqrt{\frac{4a^{-2}}{9x^2}}$ **h.** $\left(\sqrt[3]{27x^3}\right)^{-2}$ **i.** $\left(\frac{xy^{-1}}{\sqrt{x^5}}\right)^{-2}$

2.2 දර්ශක ඇතුළත් සමීකරණ විසඳීම

$2^x = 2^3$ යනු සමීකරණයකි. එහි සමාන ලකුණ දෙපස වූ බල දෙකේ ම පාද සමාන නිසා දර්ශක දෙක ද සමාන වේ. ඒ අනුව,

$2^x = 2^3$ වන විට $x = 3$ වේ.

එසේ ම $x^5 = 2^5$ යන සමීකරණයේ ද සමාන ලකුණ දෙපස ඇත්තේ දර්ශක දෙක සමාන වූ බල දෙකකි. එම දර්ශක සමාන නිසා පාද දෙක ද සමාන වේ. ඒ අනුව,
$x^5 = 2^5$ වන විට $x = 2$ වේ. එහෙත් $x^2 = 3^2$ හි දර්ශක සමාන වන අතර $+3$ හා -3 යන අගය දෙක ම x සඳහා විසඳුම් වේ. එසේ ධන හා සෘණ අගය දෙකක් ලැබෙන්නේ දර්ශකය වන 2 ඉරට්ට නිසා ය. එහෙත් මෙම පාඩම තුළ දී $x > 0$ වන අවස්ථා පමණක් සලකා බලමු.

1හි බල සතුව අපූරු ගුණාංගයක් පවතී. එනම් 1හි ඕනෑ ම බලයක් 1ට සමාන වේ. එනම් සියලු m සඳහා $1^m = 1$ වේ.
සාධාරණ වශයෙන්, ඉහත මූලධර්මය මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$x > 0, y > 0$ හා $x \neq 1, y \neq 1$ නම්

> $x \neq 0$ වන විට, $x^m = x^n$ නම් $m = n$ වේ.
> $m \neq 0$ වන විට, $x^m = y^m$ නම් $x = y$ වේ.

මෙම මූලධර්මය දර්ශක ඇතුළත් සමීකරණ විසඳීම සඳහා යොදා ගනිමු.

නිදසුන 1

විසඳන්න.

(i) $4^x = 64$ (ii) $x^3 = 343$ (iii) $3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$

(i)
$$4^x = 64$$
$$4^x = 4^3$$
$$\therefore x = 3$$

(ii)
$$x^3 = 343$$
$$x^3 = 7^3$$
$$\therefore x = 7$$

(iii)
$$3 \times 9^{2x-1} = 27^{-x}$$
$$3 \times (3^2)^{2x-1} = (3)^{3(-x)}$$
$$3 \times 3^{2(2x-1)} = 3^{-3x}$$
$$3^{1+4x-2} = 3^{-3x}$$
$$\therefore 1 + 4x - 2 = -3x$$
$$4x + 3x = 2 - 1$$
$$7x = 1$$
$$x = \frac{1}{7}$$

2.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

a. $3^x = 9$ **b.** $3^{x+2} = 243$

c. $4^{3x} = 32$ **d.** $2^{5x-2} = 8^x$

e. $8^{x-1} = 4^x$ **f.** $x^3 = 216$

g. $2\sqrt{x} = 6$ **h.** $\sqrt[3]{2x^2} = 2$

2. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

a. $2^x \times 8^x = 256$ **b.** $8 \times 2^{x-1} = 4^{x-2}$

c. $5 \times 25^{2x-1} = 125$ **d.** $3^{2x} \times 9^{3x-2} = 27^{-3x}$

e. $4^x = \frac{1}{64}$ **f.** $(3^x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{27}$

g. $3^{4x} \times \frac{1}{9} = 9^x$ **h.** $x^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2.3 ලඝුගණක නීති

$\log_2 (16 \times 32) = \log_2 16 + \log_2 32$ හා $\log_2 (32 \div 16) = \log_2 32 - \log_2 16$ ලෙස ලඝුගණක නීති ඇසුරෙන් ලිවිය හැකි බව අපි දනිමු. එම නීති, සාධාරණ වශයෙන්

$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ ලෙස ද

$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ ලෙස ද දැක්වේ.

එවැනි තවත් ලඝුගණක නීතියක් දැන් හඳුනා ගනිමු.

නිදසුනක් ලෙස $\log_5 125^4$ යන්න සලකමු.

$$\begin{aligned}\log_5 125^4 &= \log_5 (125 \times 125 \times 125 \times 125)\\ &= \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125 + \log_5 125\\ &= 4 \log_5 125\end{aligned}$$

එලෙස ම,

$\log_{10} 10^5 = 5 \log_{10} 10$

$\log_3 5^2 = 2 \log_3 5$ ද වේ. මෙය සාධාරණ වශයෙන්, ලඝුගණක නීතියක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$$\boxed{\log_a m^r = r \log_a m}$$

භාගමය දර්ශක සහිත ප්‍රකාශන සඳහා ද මෙම නීතිය සත්‍ය වන අතර, ඊට අදාළ නිදසුන් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

$$\log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\log_5 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 7$$

ඉහත හඳුනා ගත් ලඝුගණක නීතියත් ඇතුළු ව සියලු ලඝුගණක නීති යොදා ගන්නා ආකාරය පහත නිදසුන් මගින් දැක්වේ.

නිදසුන 1

අගය සොයන්න.

(i) $\lg 1000$ (ii) $\log_4 \sqrt[3]{64}$ (iii) $2 \log_2 2 + 3 \log_2 4 - 2\log_2 8$

(i) $\lg 1000 = \lg 10^3$

$= 3 \lg 10$

$= 3 \times 1$ ($\lg 10 = 1$ නිසා)

$= \underline{\underline{3}}$

(ii) $\log_4 \sqrt[3]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \log_4 64$

$= \frac{1}{3} \log_4 4^3$

$= \frac{1}{3} \times 3 \log_4 4$

$= \log_4 4$

$= \underline{\underline{1}}$

(iii) $2 \log_2 2 + 3 \log_2 4 - 2\log_2 8 = 2\log_2 2 + 3 \log_2 2^2 - 2\log_2 2^3$

$= \log_2 2^2 + \log_2 (2^2)^3 - \log_2 (2^3)^2$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times (2^2)^3}{(2^3)^2}\right)$

$= \log_2 \left(\frac{2^2 \times 2^6}{2^6}\right)$

$= \log_2 2^2$

$= 2 \log_2 2$

$= \underline{\underline{2}}$

නිදසුන 2

විසඳන්න.

(i) $2\lg 8 + 2\lg 5 = \lg 4^3 + \lg x$

$\therefore \quad \lg x = 2\lg 8 + 2\lg 5 - \lg 4^3$

$= \lg 8^2 + \lg 5^2 - \lg 4^3$

$\therefore \quad \lg x = \lg\left(\frac{8^2 \times 5^2}{4^3}\right)$

$\therefore \quad \lg x = \lg 25$

$\therefore \quad \underline{\underline{x = 25}}$

(ii) $2\log_b 3 + 3\log_b 2 - \log_b 72 = \frac{1}{2}\log_b x$

$$\therefore\ 2\log_b 3 + 3\log_b 2 - \log_b 72 = \frac{1}{2}\log_b x$$

$$\therefore\ \log_b 3^2 + \log_b 2^3 - \log_b 72 = \log_b x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \log_b\left(\frac{3^2 \times 2^3}{72}\right) = \log_b x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{3^2 \times 2^3}{72} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ 1^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2$$

$$\therefore\ 1 = x^1$$

$$\therefore\ \underline{\underline{x = 1}}$$

නිදසුන 3

සත්‍යාපනය කරන්න: $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$

වම් පැත්ත

$$\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5\left(\frac{75}{3}\right)$$
$$= \log_5 25$$
$$= \log_5 5^2$$
$$= 2$$

දකුණු පැත්ත

$$\log_5 40 - \log_5 8 + 1 = \log_5\left(\frac{40}{8}\right) + 1$$
$$= \log_5 5 + 1$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

$$\therefore\ \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 40 - \log_5 8 + 1$$

ලඝුගණක නීති පිළිබඳ ව උගත් කරුණු උපයෝගී කර ගෙන පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

2.3 අභ්‍යාසය

1. අගය සොයන්න.

a. $\log_2 32$ **b.** $\lg 10000$ **c.** $\frac{1}{3}\log_3 27$

d. $\frac{1}{2}\log_5 \sqrt{25}$ **e.** $\log_3 \sqrt[4]{81}$ **f.** $3\log_2 \sqrt[3]{8}$

2. සුළු කර අගය සොයන්න.

a. $2\log_2 16 - \log_2 8$

b. $\lg 80 - 3\lg 2$

c. $2\lg 5 + 3\lg 2 - \lg 2$

d. $\lg 75 - \lg 3 + \lg 28 - \lg 7$

e. $\lg 18 - 3\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 9 + \lg 5$

f. $4\lg 2 + \lg\frac{15}{4} - \lg 6$

g. $\lg\frac{1}{256} - \lg\frac{125}{4} - 3\lg\frac{1}{20}$

h. $\log_3 27 + 2\log_3 3 - \log_3 3$

i. $\lg\frac{12}{5} + \lg\frac{25}{21} - \lg\frac{2}{7}$

j. $\lg\frac{3}{4} - 2\lg\frac{3}{10} + \lg 12 - 2$

3. විසඳන්න.

a. $\lg x + \lg 4 = \lg 8 + \lg 2$

b. $4\lg 2 + 2\lg x + \lg 5 = \lg 15 + \lg 12$

c. $3\lg x + \lg 96 = 2\lg 9 + \lg 4$

d. $\lg x = \frac{1}{2}(\lg 25 + \lg 8 - \lg 2)$

e. $3\lg x + 2\lg 8 = \lg 48 + \frac{1}{2}\lg 25 - \lg 30$

f. $\lg 125 + 2\lg 3 = 2\lg x + \lg 5$

සාරාංශය

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $x > 0, y > 0$ හා $x \neq 1, y \neq 1$ නම්

  $x \neq 0$ වන විට, $x^m = x^n$ නම් $m = n$ වේ.
  $m \neq 0$ වන විට, $x^m = y^m$ නම් $x = y$ වේ.
- $\log_a m^r = r\log_a m$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. අගය සොයන්න.

a. $(\sqrt[3]{8})^2 \times \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$

b. $(\sqrt{125})^3 \times \frac{1}{\sqrt{20}} \times 10$

c. $\frac{32^{-\frac{2}{5}} \times 216^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{8^0} \times \sqrt[3]{27^{-2}}}$

d. $\sqrt{\frac{18 \times 5^2}{8}}$

e. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 5^{-2} \times 100$

f. $27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$

2. සුළු කර ධන දර්ශක සහිතව ප්‍රකාශ කරන්න.

a. $\sqrt{a^2 b^{-\frac{1}{2}}}$

b. $(x^{-4})^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$

c. $(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

d. $(x \div \sqrt[n]{x})^n$

e. $\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$

3. සත්‍යාපනය කරන්න.

a. $\lg\left(\frac{217}{38} \div \frac{31}{266}\right) = 2\lg 7$

b. $\frac{1}{2}\lg 9 + \lg 2 = 2\lg 3 - \lg 1.5$

c. $\log_3 24 + \log_3 5 - \log_3 40 = 1$

d. $\lg 26 + \lg 119 - \lg 51 - \lg 91 = \lg 2 - \lg 3$

e. $2\log_a 3 + \log_a 20 - \log_a 36 = \log_a 10 - \log_a 2$

3 දර්ශක හා ලඝුගණක II

මෙම පාඩම අධ්‍යයනයෙන් ඔබට,

- ලඝුගණක වගුව යොදා ගනිමින් 0ත් 1ත් අතර සංඛ්‍යාවල බල හා මූල ඇතුළත් ගුණ කිරීම් හා බෙදීම් සහිත ප්‍රකාශන සුළු කිරීමටත්
- විද්‍යාත්මක ගණකයේ $\boxed{\wedge}$ හා $\boxed{\sqrt{\ }}$ යතුරු හඳුනා ගැනීමටත් දශම, බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රය ඇසුරෙන් සුළු කිරීමටත්

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ලඝුගණක

$10^3 = 1000$ වේ. එය $\log_{10} 1000 = 3$ ලෙස ලඝුගණක ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි ය. සම්මුතියක් ලෙස $\log_{10}$ වෙනුවට lg පමණක් යොදා එය $\lg 1000 = 3$ ලෙස දක්වන බව ද අපි දනිමු. පාදය 10 හැර වෙනත් පාද ඇති විට පාදය සඳහන් කළ යුතු ය. නිදසුන් ලෙස,

$5^2 = 25$ වන නිසා $\log_5 25 = 2$ ද
$10^0 = 1$ වන නිසා, $\lg 1 = 0$ ද
$10^1 = 10$ වන නිසා, $\lg 10 = 1$ ද වේ.

ඕනෑ ම ධන සංඛ්‍යාවක ලඝුගණක ලබා ගැනීම, ලඝුගණක වගුව ඇසුරෙන් කළ හැකි ය. ලඝුගණක භාවිතයෙන්, ගුණ කිරීම හා බෙදීම ඇතුළත් සංඛ්‍යා සුළු කිරීම නැවත සිහිපත් කර ගැනීම පිණිස පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන වගු සම්පූර්ණ කරන්න.

(i)

සංඛ්‍යාව	විද්‍යාත්මක අංකනය	ලඝුගණකය		ලඝුගණකය
		පූර්ණාංශය	දශමාංශය	
73.45	7.345×10^1	1	0.8660	1.8660
8.7				
12.5				
725.3				
975				

(ii)

ලඝුගණකය	ලඝුගණකය		විද්‍යාත්මක අංකනය	සංඛ්‍යාව
	පූර්ණාංශය	දශමාංශය		
1.5492				
2.9059				
1.4036				
2.8798				
3.4909				

2. ලඝුගණක වගුව යොදා ගනිමින් හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

a. lg 5.745 = 0.7593 නිසා 5.745 = $10^{0.7593}$
b. lg 9.005 = ... නිසා 9.005 = $10^{\text{........}}$
c. lg 82.8 = ... නිසා 82.8 = $10^{\text{........}}$
d. lg 74.01 = ... නිසා 74.01 = $10^{\text{........}}$
e. lg 853.1 = ... නිසා 853.1 = $10^{\text{........}}$
f. antilog 0.7453 = 5.562 නිසා 5.562 = $10^{0.7453}$
g. antilog 0.0014 = ... නිසා .... = $10^{0.0014}$
h. antilog 1.9251 = ... නිසා .... = $10^{1.9251}$
i. antilog 2.4374 = ... නිසා .... = $10^{2.4374}$
j. antilog 3.2001 = ... නිසා .... = $10^{3.2001}$

3. හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරමින් P හි අගය සොයන්න.

(i) ලඝුගණක ප්‍රකාශනයක් ලෙස

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

lg P = lg ...... + lg ...... − lg ....

= .... + ... − ....

= ....

∴ P = antilog ....

= ....

(ii) දර්ශක ආකාරයෙන්

$$P = \frac{27.32 \times 9.8}{11.5}$$

$$= \frac{10^{\cdots\cdots} \times 10^{\cdots\cdots}}{10^{\cdots\cdots}}$$

$$= \frac{10^{\cdots\cdots}}{10^{\cdots\cdots}}$$

$= 10^{\cdots\cdots}$

$= \text{........} \times 10^{\cdots\cdots}$

= ....

4. ලඝුගණක ඇසුරෙන් සුළු කරන්න.

a. 14.3×95.2 **b.** $2.575 \times 9.27 \times 12.54$ **c.** $\dfrac{9.87 \times 7.85}{4.321}$

3.1 එකට අඩු දශම සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක

ලඝුගණක වගුවෙන් 1ට වැඩි සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක ලබා ගත් ආකාරය පිළිබඳ ව අවධානය යොමු කරමින් 0ත් 1ත් අතර සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක ලබා ගන්නා අයුරු දැන් සලකා බලමු. ඒ සඳහා පහත දැක්වෙන වගුව පරීක්ෂා කරන්න.

සංඛ්‍යාව	විද්‍යාත්මක අංකනය	ලඝුගණකය		ලඝුගණකය
		පූර්ණාංශය	දශමාංශය	
5432	5.432×10^3	3	0.7350	3.7350
543.2	5.432×10^2	2	0.7350	2.7350
54.32	5.432×10^1	1	0.7350	1.7350
5.432	5.432×10^0	0	0.7350	0.7350
0.5432	5.432×10^{-1}	− 1	0.7350	$\bar{1}.7350$
0.05432	5.432×10^{-2}	− 2	0.7350	$\bar{2}.7350$
0.005432	5.432×10^{-3}	− 3	0.7350	$\bar{3}.7350$
0.0005432	5.432×10^{-4}	− 4	0.7350	$\bar{4}.7350$

ඉහත වගුව අනුව, පළමු තීරයේ 5.432න් පසු ඇති 0ත් 1ත් අතර වූ සංඛ්‍යාවල ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය සෘණ අගයක් ගනී. පූර්ණාංශය සෘණ අගයක් වුව ද වගුවෙන් ලබාගත් ලඝුගණකයේ දශමාංශය ධන අගයකි. පූර්ණාංශය පමණක් සෘණ වන බව දැක්වීමට ඊට ඉහළින් "−" යෙදීම කරනු ලැබේ. එය කියවනු ලබන්නේ **වියුති** ලෙස යි.

නිදසුනක් ලෙස $\bar{2}.3725$ යන්න වියුති දෙකයි දශම තුනයි හතයි දෙකයි පහ ලෙස කියවනු ලැබේ. තව ද, $\bar{2}.3725$ මගින් දැක්වෙන්නේ $-2 + 0.3725$ යන්න යි.

0ත් 1ත් අතර වූ සංඛ්‍යාවල ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය සෘණ වේ. එවැනි සංඛ්‍යාවක පූර්ණාංශය ලබා ගැනීම විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් මෙන් ම දශම තිතට පසු එන බින්දු ගණනින් ද කළ හැකි ය. දශම තිතට පසුව (හා ඊට පසුව එන පළමු නිශ්ශූන්‍ය ඉලක්කමට පෙර) ඇති බින්දු ගණනට එකක් එකතු කර, එහි සෘණ අගය ගත් විට ලැබෙන අගය ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය වේ. ඒ බව ඉහත වගුව තුළින් ද නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය.

උදා:- 0.004302 දශම තිතට පසුව පළමු නිශ්ශූන්‍ය ඉලක්කමට පෙර ඇති බින්දු ගණන 2; පූර්ණාංශය $\bar{3}$

0.04302 දශම තිතට පසුව බින්දු ගණන 1; පූර්ණාංශය $\overline{2}$
0.4302 දශම තිතට පසුව බින්දු ගණන 0; පූර්ණාංශය $\overline{1}$

එවිට lg 0.004302 = $\overline{3}$ .6337 වේ.

එය දර්ශක ආකාරයෙන් ලියූ විට;
$0.004302 = 10^{\overline{3}.6337}$ වේ. වෙනත් අයුරකින් දක්වතොත්, $0.004302 = 10^{-3} \times 10^{0.6337}$ වේ.
0 ත් 1ත් අතර සංඛ්‍යාවල ලඝුගණක ලබා ගැනීම හුරු වීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

3.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය ලියා දක්වන්න.

a. 0.9843 **b.** 0.05 **c.** 0.0725
d. 0.0019 **e.** 0.003141 **f.** 0.000783

2. අගය සොයන්න.

a. lg 0.831 **b.** lg 0.01175 **c.** lg 0.0034
d. lg 0.009 **e.** lg 0.00005 **f.** lg 0.00098

3. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා, දහයේ බල ලෙස ලියා දක්වන්න.

a. 0.831 **b.** 0.01175 **c.** 0.0034
d. 0.009 **e.** 0.00005 **f.** 0.00098

3.2 ලඝුගණකයට අදාළ සංඛ්‍යාව (ප්‍රතිලඝුගණකය - antilog)

මීට කලින් උගත් 10ට වැඩි සංඛ්‍යාවල ප්‍රතිලඝුගණකය ලබා ගත් අයුරු සිහිපත් කරමු.

antilog 2.7421 = 5.522×10^2
= 552.2

සංඛ්‍යාවක් විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් ලියූ විට ලැබෙන 10හි බලයෙහි දර්ශකය එම සංඛ්‍යාවේ ලඝුගණකයේ පූර්ණාංශය වේ. ප්‍රතිලඝුගණකය ලබා ගැනීමේ දී පූර්ණාංශයෙන් දැක්වෙන අගයට සමාන ස්ථාන ගණනින් දශම තිත ගමන් කළ යුතු ය. ඒ අනුව ඉහත 5.522 හි දශම තිත ස්ථාන දෙකක් දකුණත් පසට ගමන් කොට 552.2 ලැබී ඇත. එහෙත් ඍණ පූර්ණාංශයක් සහිත අවස්ථාවේ දී මෙම දශම තිත ගමන් කිරීම වමත් පසට සිදු වේ.

antilog $\overline{2}.7421$ = 5.522×10^{-2} (දශම තිත වමත් පසට ස්ථාන දෙකක් යා යුතු යි)
= 0.05522 (වියුති 2 නිසා දශම තිතට පසු ඊළඟට බින්දු 1)

antilog $\overline{1}.7421$ = 5.522×10^{-1} (දශම තිත වමත් පසට ස්ථාන එකක් යා යුතු ය)
= 0.5522 (වියුති 1 නිසා දශම තිතට පසු ඊළඟට බින්දු නැත)

3.2 අභ්‍යාසය

1. විද්‍යාත්මක අංකනයෙන් දී ඇති පහත දැක්වෙන එක් එක් සංඛ්‍යාව දශමය සංඛ්‍යාවක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

a. 3.37×10^{-1} **b.** 5.99×10^{-3} **c.** 6.0×10^{-2}
d. 5.745×10^{0} **e.** 9.993×10^{-4} **f.** 8.777×10^{-3}

2. ලඝුගණක වගුව ඇසුරෙන් අගය සොයන්න.

a. antilog $\overline{2}.5432$ **b.** antilog $\overline{1}.9321$ **c.** antilog 0.9972
d. antilog $\overline{4}.5330$ **e.** antilog $\overline{2}.0000$ **f.** antilog $\overline{3}.5555$

3.3 වියුති ඇතුළත් ලඝුගණක එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

(a) එකතු කිරීම

ලඝුගණකයක දශමාංශය, ලඝුගණක වගුවෙන් ලබා ගන්නා අතර, එය සැම විට ම ධන අගයක් ම වේ. එහෙත්, පූර්ණාංශය ධන හෝ සෘණ හෝ ශුන්‍ය වන බව අපි දනිමු. $\overline{2}.5143$ හි දශමාංශය වන .5143 ධන ද පූර්ණාංශය වන $\overline{2}$, සෘණ 2 ද වේ. මෙවැනි සංඛ්‍යා එකතු කිරීමේ දී හෝ අඩු කිරීමේ දී, දශමාංශ කොටස් වෙනමත්, පූර්ණාංශ කොටස් වෙනමත් සුළු කළ යුතු වේ.

නිදසුන 1

සුළු කරන්න; පිළිතුර සෘණ අගයක් ලැබේ නම් එය වියුති ආකාරයෙන් තබන්න.

(i) $\overline{2}.5143 + \overline{1}.2375$
$= -2 + 0.5143 + (-1) + 0.2375$
$= (-2 - 1) + (0.5143 + 0.2375)$
$= -3 + 0.7518$
$= \underline{\underline{\overline{3}.7518}}$

(ii) $\overline{3}.9211 + 2.3142$
$= -3 + 0.9211 + 2 + 0.3142$
$= (-3 + 2) + (0.9211 + 0.3142)$
$= -1 + 1.2353$
$= -1 + 1 + 0.2353$
$= \underline{\underline{0.2353}}$

(iii) $\overline{3}.8753 + 1.3475$
$= -3 + 0.8753 + 1 + 0.3475$
$= (-3 + 1) + (0.8753 + 0.3475)$
$= -2 + 1.2228$
$= -2 + 1 + 0.2228$
$= \underline{\underline{\overline{1}.2228}}$

(b) අඩු කිරීම

එකතු කිරීමේ දී මෙන් ම, දශම කොටස ධන බව සැලකිල්ලට ගෙන දකුණත් පස සිට වමත් පසට පිළිවෙළින් අඩු කළ යුතු වේ.

නිදසුන 2

සුළු කරන්න; සෘණ අගයක් ලැබේ නම් එය වියුති ආකාරයෙන් තබන්න.

(i) $\bar{2}.5143 - 1.3143 = -2 + 0.5143 - (1 + 0.3143)$
$= -2 + 0.5143 - 1 - 0.3143$
$= -2 - 1 + 0.5143 - 0.3143$
$= -3 + 0.2000$
$= \underline{\underline{\bar{3}.2000}}$

(ii) $2.5143 - \bar{1}.9143 = 2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= 2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= 3 - 0.4000$
$= \underline{\underline{2.6000}}$

(iii) $0.2143 - \bar{1}.8143 = 0.2143 - (-1 + 0.8143)$
$= 0.2143 + 1 - 0.8143$
$= 1 - 0.6000$
$= \underline{\underline{0.4}}$

(iv) $\bar{2}.5143 - \bar{1}.9143 = -2 + 0.5143 - (-1 + 0.9143)$
$= -2 + 0.5143 + 1 - 0.9143$
$= -2 + 1 + 0.5143 - 0.9143$
$= -1 - 0.4000$

මෙහි දී දශම කොටස ලෙස සෘණ අගයක් ලැබේ. එහෙත් ලඝුගණකයක දශමාංශය ධන ලෙස තිබිය යුතු නිසා, පහත ආකාරයේ උපක්‍රමයක් භාවිත කරමු.

$-1 - 0.4 = -1 - 1 + 1 - 0.4$ ($-1+1 = 0$ නිසා අගය වෙනස් නො වේ)
$= -2 + 0.6$
$= \bar{2}.6$

මෙහි දී සිදු කරනු ලැබුවේ පූර්ණාංශයට -1 ක් හා දශමාංශයට $+1$ ක් එකතු කිරීමයි.

සටහන: ඉහත (iv) හි තුන් වන පියවරේ දී ම මෙම සෘණ දශමාංශයක් ලැබීම මගහරවා ගත හැකි ව තිබිණි. ඒ මෙසේ ය:

$-2 + 0.5143 + 1 - 0.9143 = -2 + 1.5143 - 0.9143 = -2 + 0.6 = \bar{2}.6$

3.3 අභ්‍යාසය

1. සුළු කරන්න.

a. $0.7512 + \bar{1}.3142$ **b.** $\bar{1}.3072 + \bar{2}.2111$ **c.** $\bar{2}.5432 + \bar{1}.9513$

d $\bar{3}.9121 + \bar{1}.5431$ **e.** $0.7532 + \bar{3}.8542$ **f.** $\bar{1}.8311 + \bar{2}.5431 + 1.3954$

g. $3.8760 - \bar{2}.5431$ **h.** $\bar{2}.5132 - \bar{1}.9332$ **i.** $\bar{3}.5114 - \bar{2}.4312$

j $\bar{2}.9372 - 1.5449$ **k.** $0.7512 + \bar{1}.9431$ **l.** $\bar{1}.9112 - \bar{3}.9543$

2. සුළු කරන්න.

a. $\bar{1}.2513 + 0.9172 - \bar{1}.514$ **b.** $\bar{3}.2112 + 2.5994 - \bar{1}.5004$

c. $\bar{3}.2754 + \bar{2}.8211 - \bar{1}.4372$ **d.** $0.8514 - \bar{1}.9111 - \bar{2}.3112$

e. $\bar{3}.7512 - (0.2511 + \bar{1}.8112)$ **f.** $\bar{1}.2572 + 3.9140 - \bar{1}.1111$

3.4 ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශන සුළු කිරීම

පහත දැක්වෙන ලඝුගණක නීති භාවිතයෙන් සංඛ්‍යාත්මක ගණනය කිරීම් කරන අයුරු පහත දැක්වෙන නිදසුන් කීපයක් මගින් විමසා බලමු.

1. $\log_a (P \times Q) = \log_a P + \log_a Q$

2. $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

නිදසුන 1

ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් හා ලඝුගණක නීති යොදා ගනිමින් සුළු කරන්න.

a. 43.85×0.7532 **b.** 0.0034×0.8752

c. $0.0875 \div 18.75$ **d.** $0.3752 \div 0.9321$

a. 43.85×0.7532

මෙහි දී ආකාර දෙකකින් සුළු කිරීම කළ හැකි ය.

පළමු ක්‍රමය $P = 43.85 \times 0.7532$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\lg P = \lg (43.85 \times 0.7532)$

$= \lg 43.85 + \lg 0.7532$

$= 1.6420 + \bar{1}.8769$

$= 1 + 0.6420 - 1 + 0.8769$

$= 1.5189$

$\therefore P = \text{antilog } 1.5189$

$= \underline{\underline{33.03}}$

දෙවන ක්‍රමය

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම

43.85×0.7532

$= 10^{1.6420} \times 10^{\bar{1}.8769}$

$= 10^{1.5189}$

$= 3.303 \times 10^{1}$

$= \underline{\underline{33.03}}$

b. 0.0034×0.8752

$P = 0.0034 \times 0.8752$ ලෙස ගනිමු.

$\lg P = \lg (0.0034 \times 0.8752)$

$= \lg 0.0034 + \lg 0.8752$

$= \bar{3}.5315 + \bar{1}.9421$

$= -3 + 0.5315 - 1 + 0.9421$

$= -4 + 1.4736$

$= -4 + 1 + 0.4736$

$= -3 + 0.4736$

$= \bar{3}.4736$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{3}.4736$

$= \underline{\underline{0.002975}}$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම
0.0034×0.8752
$= 10^{\bar{3}.5315} \times 10^{\bar{1}.9421}$
$= 10^{\bar{3}.4736}$
$= 2.975 \times 10^{-3}$
$= \underline{\underline{0.002975}}$

c. $0.0875 \div 18.75$

$P = 0.0875 \div 18.75$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\lg P = \lg (0.0875 \div 18.75)$

$= \lg 0.0875 - \lg 18.75$

$= \bar{2}.9420 - 1.2730$

$= -2 + 0.9420 - 1 - 0.2730$

$= -3 + 0.6690$

$= \bar{3}.6690$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{3}.6690$

$= \underline{\underline{0.004666}}$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම
$0.0875 \div 18.75$
$= 10^{\bar{2}.9420} \div 10^{1.2730}$
$= 10^{\bar{2}.9420 - 1.2730}$
$= 10^{\bar{3}.6690}$
$= 4.666 \times 10^{-3}$
$= \underline{\underline{0.004666}}$

d. $0.3752 \div 0.9321$

$P = 0.3752 \div 0.9321$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\lg P = \lg (0.3752 \div 0.9321)$

$= \lg 0.3752 - \lg 0.9321$

$= \bar{1}.5742 - \bar{1}.9694$

$= -1 + 0.5742 - (-1 + 0.9694)$

$= -1 + 0.5742 + 1 - 0.9694$

$= -1 + 0.5742 + 0.0306$

$= -1 + 0.6048$

$= \bar{1}.6048$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.6048$

$= \underline{\underline{0.4026}}$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම

$0.3752 \div 0.9321$

$= 10^{\bar{1}.5742} \div 10^{\bar{1}.9694}$

$= 10^{\bar{1}.5742 - \bar{1}.9694}$

$= 10^{\bar{1}.6048}$

$= 4.026 \times 10^{-1}$

$= \underline{\underline{0.4026}}$

නිදසුන 2

ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සුළු කරන්න.

$$\frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$

$P = \dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\lg P = \lg \left(\dfrac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}\right)$

$= \lg 8.753 + \lg 0.02203 - \lg 0.9321$

$= 0.9421 + \bar{2}.3430 - \bar{1}.9694$

$= 0.9421 - 2 + 0.3430 - \bar{1}.9694$

$= \bar{1}.2851 - \bar{1}.9694$

$= -1 + 0.2851 - (-1 + 0.9694)$

$= -1 + 0.2851 + 1 - 0.9694$

$= \bar{1}.3157$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{1}.3157$

$= \underline{\underline{0.2068}}$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම

$$\frac{8.753 \times 0.02203}{0.9321}$$

$= \dfrac{10^{0.9421} \times 10^{\bar{2}.3430}}{10^{\bar{1}.9694}}$

$= \dfrac{10^{\bar{1}.2851}}{10^{\bar{1}.9694}}$

$= 10^{\bar{1}.2851 - \bar{1}.9694}$

$= 10^{\bar{1}.3157}$

$= 2.068 \times 10^{-1}$

$= \underline{\underline{0.2068}}$

3.4 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

1. a. 5.945×0.782 **b.** 0.7453×0.05921 **c.** 0.0085×0.0943

d. $5.21 \times 0.752 \times 0.093$ **e.** $857 \times 0.008321 \times 0.457$ **f.** $0.123 \times 0.9857 \times 0.79$

2. a. $7.543 \div 0.9524$ **b.** $0.0752 \div 0.8143$ **c.** $0.005273 \div 0.0078$

d. $0.9347 \div 8.75$ **e.** $0.0631 \div 0.003921$ **f.** $0.0752 \div 0.0008531$

3. a. $\dfrac{8.247 \times 0.1973}{0.9875}$ **b.** $\dfrac{9.752 \times 0.0054}{0.09534}$ **c.** $\dfrac{79.25 \times 0.0043}{0.3725}$

d. $\dfrac{0.7135 \times 0.4391}{0.0059}$ **e.** $\dfrac{5.378 \times 0.9376}{0.0731 \times 0.471}$ **f.** $\dfrac{71.8 \times 0.7823}{23.19 \times 0.0932}$

3.5 සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකය පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම හා බෙදීම

එකට වැඩි සංඛ්‍යාවල ලඝුගණකවල පූර්ණාංශ ධන අගයක් ගන්නා බව අපි දනිමු. එවැනි ලඝුගණකයක් තවත් සංඛ්‍යාවකින් ගුණකිරීමේ දී හෝ බෙදීමේ දී සාමාන්‍ය ක්‍රමයට සුළු කළ හැකි ය. නමුත්, 0ත් 1ත් අතර සංඛ්‍යාවල ලඝුගණකවල පූර්ණාංශ සෘණ අගයන් ගන්නා බව අපි දනිමු.

$\overline{3}.8247$ එවැනි ලඝුගණකයකි. මෙවැනි වියුති ඇතුළත් ලඝුගණකයක් තවත් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීමේ දී හෝ බෙදීමේ දී පූර්ණාංශ හා දශමාංශ කොටස් වෙන වෙන ම සුළු කර ගත හැකි ය.

ලඝුගණක පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

නිදසුන 1

සුළු කරන්න.

a. 2.8111×2 **b.** $\overline{2}.7512 \times 3$ **c.** $\overline{1}.9217 \times 3$

a.

$$\begin{aligned} & 2.8111 \times 2 \\ = \ & \underline{\underline{5.6222}} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & \overline{2}.7512 \times 3 \\ &= 3(-2 + 0.7512) \\ &= -6 + 2.2536 \\ &= -6 + 2 + 0.2536 \\ &= -4 + 0.2536 \\ &= \underline{\underline{\overline{4}.2536}} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & \overline{1}.9217 \times 3 \\ & 3(-1 + 0.9217) \\ &= -3 + 2.7651 \\ &= -3 + 2 + 0.7651 \\ &= -1 + 0.7651 \\ &= \underline{\underline{\overline{1}.7651}} \end{aligned}$$

ලඝුගණක පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීම

ලඝුගණක, පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදන අයුරු දැන් සලකා බලමු. පූර්ණාංශය වියුති ගණනක් ලෙස පවතින ලඝුගණකයක් පූර්ණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමේ දී පූර්ණාංශය හා දශමාංශය යන කොටස් දෙකේ සෘණ හා ධන අගයයන් පවතින නිසා බෙදීමේ දී සෘණ කොටස හා ධන කොටස වෙන වෙන ම බෙදිය යුතු ය. එවැනි අවස්ථා කීපයක් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 2

සුළු කරන්න.

a. $2.5142 \div 2$

$2.5142 \div 2$
$= \underline{\underline{1.2571}}$

b. $\overline{3}.5001 \div 3$

$(-3 + 0.5001) \div 3$ නිසා

$\overline{3} \div 3 = \overline{1}$
$0.5001 \div 3 = 0.1667$

$\therefore \overline{3}.5001 \div 3$
$= \underline{\underline{\overline{1}.1667}}$

c. $\overline{4}.8322 \div 2$

$(-4 + 0.8322) \div 2$ නිසා

$\overline{4} \div 2 = \overline{2}$
$0.8322 \div 2 = 0.4161$

$\therefore \overline{4}.8322 \div 2$
$= \underline{\underline{\overline{2}.4161}}$

ඉහත නිදසුනෙහි ඇති ලඝුගණකවල පූර්ණාංශය ඉතිරි නැති ව බෙදිණි. පූර්ණාංශය ඉතිරියක් සහිතව බෙදෙන අවස්ථාවල දී එම බෙදීම කරන ආකාරය පහත නිදසුන් මගින් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

සුළු කරන්න.

a. $\overline{1}.5412 \div 2$ **b.** $\overline{1}.3712 \div 3$ **c.** $\overline{3}.5112 \div 2$

a. $\overline{1}.5412 \div 2$ යන්න $(-1 + 0.5412) \div 2$ ලෙස ගත හැකි ය.

පූර්ණාංශයේ $\overline{1}$ යන්න 2 න් හරියට ම නොබෙදෙන නිසා, එය $\overline{2} + 1$ ලෙස සකස් කර ගත හැකි ය. ඒ අනුව

$$\begin{aligned}\overline{1}.5412 \div 2 &= (-1 + 0.5412) \div 2 \\ &= (-2 + 1 + 0.5412) \div 2 \\ &= (-2 + 1.5412) \div 2 \\ &= \underline{\underline{\overline{1}.7706}}\end{aligned}$$

b. $\bar{1}.3712 \div 3$

$= (-1 + 0.3712) \div 3$ ($-1 = -3 + 2$ නිසා)

$= (-3 + 2 + 0.3712) \div 3$

$= (\bar{3} + 2.3712) \div 3$

$= \underline{\underline{\bar{1}.7904}}$

c. $\bar{3}.5112 \div 2$

$= (-3 + 0.5112) \div 2$

$= (-4 + 1 + 0.5112) \div 2$ ($-3 = -4 + 1$ නිසා)

$= (\bar{4} + 1.5112) \div 2$

$= \underline{\underline{\bar{2}.7556}}$

ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් කරන සුළු කිරීම්වලදී, මෙම ගුණ කිරීම් හා බෙදීම් වැදගත් වන නිසා, එම දැනුම ප්‍රගුණ කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

3.5 අභ්‍යාසය

1. අගය සොයන්න.

a. $\bar{1}.5413 \times 2$ **b.** $\bar{2}.7321 \times 3$ **c.** 1.7315×3

d. 0.4882×3 **e.** $\bar{3}.5111 \times 2$ **f.** $\bar{3}.8111 \times 4$

2. අගය සොයන්න.

a. $1.9412 \div 2$ **b.** $0.5512 \div 2$ **c.** $\bar{2}.4312 \div 2$

d. $\bar{3}.5412 \div 3$ **e.** $\bar{2}.4712 \div 2$ **f.** $\bar{4}.5321 \div 2$

g. $\bar{1}.5432 \div 2$ **h.** $\bar{2}.9312 \div 3$ **i.** $\bar{3}.4112 \div 2$

j. $\bar{1}.7512 \div 3$ **k.** $\bar{4}.1012 \div 3$ **l.** $\bar{5}.1421 \div 3$

3.6 ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සංඛ්‍යාවක බල හා මූල සෙවීම.

$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$ වේ. එය මීට කලින් උගත් ලඝුගණක නීතියක් වන $\log_a m^r = r \log_a m$ මගින් ලැබෙන බව අපි දනිමු.

එසේ ම මූල ලකුණු සහිත සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකය ද එම නීතිය යටතේ පහත දැක්වෙන ආකාරයට ලිවිය හැකි ය.

(i) $\log_a \sqrt{5} = \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ ($\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ නිසා)

$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \log_a 5}}$ (ලඝුගණක නීතිය යොදා ගැනීම)

(ii) $\lg \sqrt{25} = \lg 25^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \lg 25$

මේ අනුව සංඛ්‍යාවක බල හා මූල ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් ලබා ගන්නා අයුරු පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

අගය සොයන්න.

a. 354^2 **b.** 0.0275^3 **c.** 0.9073^4

a. $P = 354^2$ ලෙස ගනිමු.

$\lg P = \lg 354^2$

$= 2 \lg 354$

$= 2 \lg 3.54 \times 10^2$

$= 2 \times 2.5490$

$= 5.0980$

$\therefore \quad P = \text{antilog } 5.0980$

$= 1.253 \times 10^5$

$= \underline{\underline{125\,300}}$

b. $P = 0.0275^3$ ලෙස ගනිමු.

$\lg P = \lg 0.0275^3$

$= 3 \lg 0.0275$

$= 3 \times \bar{2}.4393$

$= 3 \times (-2 + 0.4393)$

$= -6 + 1.3179$

$= -6 + 1 + 0.3179$

$= -5 + 0.3179$

$= \bar{5}.3179$

$\therefore \quad P = \text{antilog } \bar{5}.3179$

$= 2.079 \times 10^{-5}$

$= \underline{\underline{0.00002079}}$

c. $P = 0.9073^4$ ලෙස ගනිමු.

$\lg P = \lg 0.9073^4$

$= 4 \lg 0.9073$

$= 4 \times \bar{1}.9577$

$= 4 \times (-1 + 0.9577)$

$= -4 + 3.8308$

$= -4 + 3 + 0.8308$

$= -1 + 0.8308$

$= \bar{1}.8308$

$\therefore P = \text{antilog } \bar{1}.8308$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= \underline{\underline{0.6773}}$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම.

$0.9073^4 = \left(10^{\bar{1}.9577}\right)^4$

$= 10^{\bar{1}.9577 \times 4}$

$= 10^{\bar{1}.8308}$

$= 6.773 \times 10^{-1}$

$= \underline{\underline{0.6773}}$

නිදසුන 2

a. $\sqrt{8.75}$ **b .** $\sqrt[3]{0.9371}$ **c.** $\sqrt[3]{0.0549}$

a. $P = \sqrt{8.75}$ ලෙස ගනිමු.

$P = \sqrt{8.75}$ නම්

$$
\begin{aligned}
P &= 8.75^{\frac{1}{2}} \\
\lg P &= \lg 8.75^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \lg 8.75 \\
&= \frac{1}{2} \times 0.9420 \\
&= 0.4710 \\
\therefore \quad P &= \text{antilog } 0.4710 \\
&= \underline{\underline{2.958}}
\end{aligned}
$$

b. $P = \sqrt[3]{0.9371}$ ලෙස ගනිමු.

$$
\begin{aligned}
P &= 0.9371^{\frac{1}{3}} \\
\lg P &= \lg 0.9371^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \lg 0.9371 \\
&= \frac{1}{3} \times \bar{1}.9717 \\
&= (\bar{1}.9717) \div 3 \\
&= (-1 + 0.9717) \div 3 \\
&= (-3 + 2 + 0.9717) \div 3 \\
&= (-3 + 2.9717) \div 3 \\
&= -1 + 0.9906 \\
&= \bar{1}.9906 \\
\therefore P &= \text{antilog } \bar{1}.9906 \\
&= \underline{\underline{0.9786}}
\end{aligned}
$$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{0.9371} &= 0.9371^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(10^{\bar{1}.9717}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 10^{\bar{1}.9717 \times \frac{1}{3}} \\
&= 10^{\bar{1}.9906} \\
&= 9.786 \times 10^{-1} \\
&= \underline{\underline{0.9786}}
\end{aligned}
$$

c. $P = \sqrt[3]{0.0549}$ ලෙස ගනිමු.

$$\begin{aligned}
\lg P &= \lg 0.0549^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\lg 0.0549 \\
&= \frac{1}{3} \times \bar{2}.7396 \\
&= (\bar{2}.7396) \div 3 \\
&= (-2 + 0.7396) \div 3 \\
&= (-3 + 1 + 0.7396) \div 3 \\
&= (-3 + 1.7396) \div 3 \\
&= -1 + 0.5799 \\
&= \bar{1}.5799 \\
\therefore\ P &= \text{antilog } \bar{1}.5799 \\
&= \underline{\underline{0.3801}}
\end{aligned}$$

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{0.0549} &= 0.0549^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(10^{\bar{2}.7396}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 10^{\bar{2}.7396 \times \frac{1}{3}} \\
&= 10^{\bar{1}.5799} \\
&= 3.801 \times 10^{-1} \\
&= \underline{\underline{0.3801}}
\end{aligned}$$

දැන් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

3.6 අභ්‍යාසය

1. ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

a. $(5.97)^2$ **b.** $(27.85)^3$ **c.** $(821)^3$

d. $(0.752)^2$ **e.** $(0.9812)^3$ **f.** $(0.0593)^2$

2. ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

a. $\sqrt{25.1}$ **b.** $\sqrt{947.5}$ **c.** $\sqrt{0.0714}$

d. $\sqrt[3]{0.00913}$ **e.** $\sqrt[3]{0.7519}$ **f.** $\sqrt{0.999}$

3.7 බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සුළු කිරීම

බල, මූල, ගුණිත හා බෙදීම් යන ගණිත කර්ම සියල්ල (හෝ සමහරක්) ඇතුළත් ප්‍රකාශනයක් ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සුළු කරන අයුරු පහත නිදසුනෙන් දැක්වේ.

නිදසුන 1

සුළු කරන්න. පිළිතුර ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට ලියන්න.

a. $\dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$

a. $P = \dfrac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට
$$\begin{aligned}
\lg P &= \lg\left(\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}}\right)\\
&= \lg 7.543 + \lg 0.987^2 - \lg 0.875^{\frac{1}{2}}\\
&= \lg 7.543 + 2\lg 0.987 - \frac{1}{2} \times \bar{1}.9420\\
&= 0.8776 + 2 \times \bar{1}.9943 - \frac{\bar{2} + 1.9420}{2}\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - (\bar{1} + 0.9710)\\
&= 0.8776 + \bar{1}.9886 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8662 - \bar{1}.9710\\
&= 0.8952\\
\therefore\ P &= \text{antilog } 0.8952\\
&= 7.855
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} \approx \underline{\underline{7.9}}$$ (ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට)

මෙම සුළු කිරීම දර්ශක ආකාරයෙන් ද කළ හැකි ය. ඒ මෙසේ ය.

$$\begin{aligned}
\frac{7.543 \times 0.987^2}{\sqrt{0.875}} &= \frac{7.543 \times 0.987^2}{0.875^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times \left(10^{\bar{1}.9943}\right)^2}{\left(10^{\bar{1}.9420}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{10^{0.8776} \times 10^{\bar{1}.9886}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= \frac{10^{0.8662}}{10^{\bar{1}.9710}}\\
&= 10^{0.8662 - \bar{1}.9710}\\
&= 10^{0.8952}\\
&= 7.855 \times 10^0\\
&= 7.855\\
&\approx \underline{\underline{7.9}}
\end{aligned}$$

b. $P = \dfrac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2}$ ලෙස ගනිමු.

$$\lg P = \lg \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2}\right)$$
$$= \lg\ 0.4537^{\frac{1}{2}} + \lg 75.4 - \lg 0.987^2$$
$$= \frac{1}{2}\lg 0.4537 + \lg 75.4 - 2\lg 0.987$$
$$= \frac{1}{2} \times \bar{1}.6568 + 1.8774 - 2 \times \bar{1}.9943$$
$$= \bar{1}.8284 + 1.8774 - \bar{1}.9886$$
$$= 1.7058 - \bar{1}.9886$$
$$= 1.7172$$
$$P = \text{antilog } 1.7172$$
$$= \underline{\underline{52.15}}$$

$$\frac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} \approx \underline{\underline{52.2}}$$ (ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට)

දර්ශක ආකාරයෙන් සුළු කිරීම පහත දැක්වේ.

$$\frac{\sqrt{0.4537} \times 75.4}{0.987^2} = \left(\frac{0.4537^{\frac{1}{2}} \times 75.4}{0.987^2}\right)$$
$$= \frac{\left(10^{\bar{1}.6568}\right)^{\frac{1}{2}} \times 10^{1.8774}}{\left(10^{\bar{1}.9943}\right)^2}$$
$$= \frac{10^{\bar{1}.8284} \times 10^{1.8774}}{10^{\bar{1}.9886}}$$
$$= 10^{1.7058 - \bar{1}.9886}$$
$$= 10^{1.7172}$$
$$= 52.15$$
$$\approx \underline{\underline{52.2}}$$

3.7 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

a. $\dfrac{8.765 \times \sqrt[3]{27.03}}{24.51}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{9.18} \times 8.02^2}{9.83}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{0.0945} \times 4.821^2}{48.15}$

d. $\dfrac{3 \times 0.752^2}{\sqrt{17.96}}$ **e.** $\dfrac{6.591 \times \sqrt[3]{0.0782}}{0.9821^2}$ **f.** $\dfrac{3.251 \times \sqrt[3]{0.0234}}{0.8915}$

3.8 ලඝුගණකවල භාවිත

සංඛ්‍යා ගුණ කිරීම් හා බෙදීම් ඇතුළත් බොහෝ ගැටලු ලඝුගණක භාවිතයෙන් පහසුවෙන් සුළු කළ හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1

අරය r වන ගෝලයක V පරිමාව, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ සූත්‍රයෙන් ලබා දෙයි. $r = 0.64$ cm නම්, $\pi = 3.142$ ලෙස ගෙන ගෝලයේ පරිමාව ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට සොයන්න.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3 \\
\therefore \lg V &= \lg\left(\frac{4}{3} \times 3.142 \times 0.64^3\right) \\
&= \lg 4 + \lg 3.142 + 3\lg 0.64 - \lg 3 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + 3 \times \bar{1}.8062 - 0.4771 \\
&= 0.6021 + 0.4972 + \bar{1}.4186 - 0.4771 \\
&= 0.5179 - 0.4771 \\
&= 0.0408 \\
\therefore V &= \text{antilog } 0.0408 \\
&= 1.098 \\
&\approx 1.1 \text{ (පළමු දශමස්ථානයට)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ගෝලයේ පරිමාව 1.1 cm^3

3.8 අභ්‍යාසය

1. යකඩ ඝන සෙන්ටිමීටරයක් 7.86 g ස්කන්ධයකින් යුක්ත වේ. දිග, පළල හා ඝනකම පිළිවෙළින් 5.4 m, 0.36 m හා 0.22 m වූ ඝනකාභාකාර යකඩ බාල්කයක ස්කන්ධය ආසන්න කිලෝග්‍රෑමයට සොයන්න.

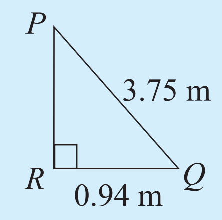
2. $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ සූත්‍රයේ $\pi = 3.142$ ද $l = 1.75$ ද $T = 2.7$ නම් g හි අගය සොයන්න.

3. අරය 0.75 m වූ වෘත්තාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් අරය 0.07 m වූ වෘත්තාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරන ලදි.

   (i) ඉතිරි කොටසේ වර්ගඵලය $\pi \times 0.82 \times 0.68$ බව පෙන්වන්න.

   (ii) π හි අගය 3.142 ලෙස ගෙන, ලඝුගණක වගු ඇසුරෙන්, ඉතිරි කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

4. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණාකාර බිම් කොටසක් රූපයේ දැක්වේ. එහි පැති දෙකක දිග 3.75 m හා 0.94 m නම්, PR පාදයේ දිග මීටර $\sqrt{4.69 \times 2.81}$ බව පෙන්වා ලඝුගණක වගු ඇසුරෙන් PR දිග මීටරවලින් ආසන්න දශමස්ථාන දෙකකට සොයන්න.



3.9 ගණක යන්ත්‍රයේ භාවිත

බොහෝ කාලයක් තිස්සේ සංකීර්ණ ගණනය කිරීම් සඳහා ලඝුගණක භාවිත කරනු ලැබිණි. එහෙත් අද කාලයේ එම කාර්යය සඳහා බොහෝ දුරට ගණක යන්ත්‍රය (calculator) යොදා ගැනේ. සාමාන්‍ය ගණක යන්ත්‍රය භාවිතයෙන් කළ හැකි ගණනය කිරීම් සීමා සහිත ය. සංකීර්ණ ගණනය කිරීම් සඳහා විද්‍යාත්මක ගණකය යොදා ගැනේ. විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රයේ යතුරු පුවරුව සාමාන්‍ය ගණක යන්ත්‍රයට වඩා තරමක් සංකීර්ණ වේ.

බලයක අගය ගණක යන්ත්‍රය මගින් ලබා ගැනීම

521^3 හි අගය ගණක යන්ත්‍රය මගින් $521 \times 521 \times 521$ ලෙස යතුරු පුවරුව ක්‍රියාත්මක කිරීමෙන් ලැබේ. එහෙත් විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රයෙන් x^n බලය දැක්වෙන යතුර භාවිතයෙන් හෝ ^ යතුරු ක්‍රියාත්මක කිරීමෙන් පහසුවෙන් එක් වර 521^3 හි අගය ලබා ගත හැකි ය.

නිදසුන 1

275^3 හි අගය ගණකය මගින් සොයන්න. සෙවීම සඳහා ක්‍රියාත්මක කරන යතුරු අනුපිළිවෙළින් දක්වන්න.

[2] [7] [5] [x^n] [3] [=] හෝ [2] [7] [5] [∧] [3] [=]

20 796 875

මූලයක අගය ගණක යන්ත්‍රය මගින් ලබා ගැනීම

යතුරු පුවරුවේ [shift] යතුර මූලයක් ලබා ගැනීමේ දී අවශ්‍ය වේ. ඊට අමතරව [$\sqrt[x]{\ }$] යතුරත් ක්‍රියාත්මක කළ හැකි ය.

නිදසුන 2

$\sqrt[4]{2313\,441}$ හි අගය ගණකය මගින් ලබා ගැනීම සඳහා ක්‍රියාත්මක කළ යුතු යතුරු අනුපිළිවෙළින් දක්වන්න.

[2] [3] [1] [3] [4] [4] [1] [shift] [x^n] [4] [=]

හෝ

[2] [3] [1] [3] [4] [4] [1] [$x^{1/n}$] [4] [=]

හෝ

[2] [3] [1] [3] [4] [4] [1] [$\sqrt[n]{x}$] [4] [=]

39

බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන සුළු කිරීම් සඳහා ගණක යන්ත්‍රය භාවිතය

$\dfrac{5.21^3 \times \sqrt[3]{4.3}}{3275}$ හි අගය ලබා ගැනීම සඳහා විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රයේ ක්‍රියාත්මක කළ යුතු යතුරු අනුපිළිවෙළින් දක්වන්න.

[5] [.] [2] [1] [x^n] [3] [×] [4] [.] [3] [$x^{1/n}$] [3] [÷] [3] [2] [7] [5] [=]

0.070219546

3.9 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය ගණනය කිරීම සඳහා විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රයේ ක්‍රියාත්මක කළ යුතු යතුරු, අනුපිළිවෙළින් සටහනක දක්වන්න.

a. 952^2

b. $\sqrt{475}$

c. 5.85^3

d. $\sqrt[3]{275.1}$

e. $375^2 \times \sqrt{52}$

f. $\sqrt{4229} \times 352^2$

g. $\dfrac{37^2 \times 853}{\sqrt{50}}$

h. $\dfrac{\sqrt{751} \times 85^2}{\sqrt[3]{36}}$

i. $\dfrac{\sqrt{1452} \times 38.75}{98.2}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{827.3} \times 5.41^2}{9.74}$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. ලඝුගණක වගුව භාවිතයෙන් සුළු කරන්න. පිළිතුරේ නිවැරදි බව ගණක යන්ත්‍රය මගින් පරීක්ෂා කරන්න.

(i) $\frac{1}{275.2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{982.1}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{0.954}}$

(iv) $0.5678^{\frac{1}{3}}$ (v) $0.785^2 - 0.0072^2$ (vi) $9.84^2 + 51.2^2$

2. $a = 0.8732$ හා $b = 3.168$ වන විට

(i) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

(ii) $(ab)^2$

අගය සොයන්න.

3. $A = p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ සූත්‍රයෙහි $p = 675$, $r = 3.5$ හා $n = 3$ වන විට, A හි අගය සොයන්න.

4. තුනී වෘත්තාකාර ලෝහ තහඩුවකින්, කේන්ද්‍රයේ කෝණය 73° ක් වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් කපා ගන්නා ලදි.

(i) කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය වෘත්තයේ වර්ගඵලයෙන් කවර භාගයක් ද?

(ii) වෘත්තාකාර තහඩුවේ අරය 17.8 cm නම් කපා ගන්නා ලද කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පැත්තක වර්ගඵලය සොයන්න.

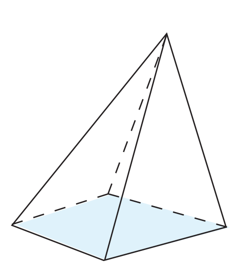
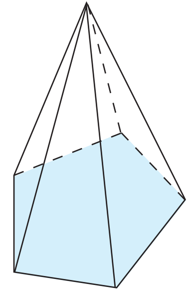
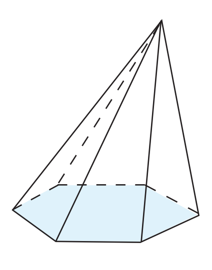
4 ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- පතුල සමචතුරස්‍රාකාර ඍජු පිරමීඩයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට
- ඍජු කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට
- ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට

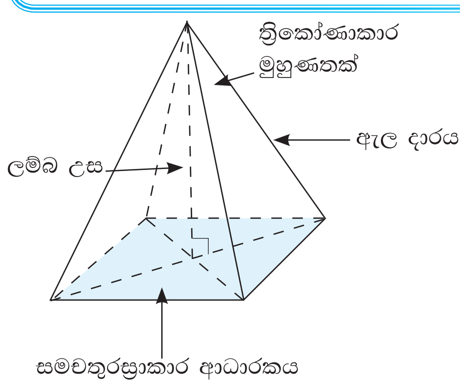
හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

පිරමීඩය

ඉහත රූපවල දැක්වෙන ඝන වස්තු හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න. ඒවායේ මුහුණත් ලෙස ඇත්තේ බහු - අස්‍රයි. එම මුහුණත් අතුරින් එකක් හැර අනෙක් සියල්ල ම ත්‍රිකෝණාකාර වේ. ත්‍රිකෝණාකාර නොවන මුහුණතට **ආධාරකය** යැයි කියනු ලැබේ. එම ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් සියල්ලට පොදු වන ලක්ෂ්‍යයක් ඇති අතර එම පොදු ලක්ෂ්‍යයට ශීර්ෂය යැයි කියනු ලැබේ. මෙම ලක්ෂණ සහිත ඝන වස්තුවකට **පිරමීඩයක්** යැයි කියනු ලැබේ.
රූපයේ දැක්වෙන පිරමීඩ තුනෙහි ආධාරක පිළිවෙළින් චතුරස්‍රාකාර, පංචාස්‍රාකාර හා ෂඩාස්‍රාකාර වේ.

ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වන ඍජු පිරමීඩය



සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත පිරමීඩයක් රූපයෙහි දැක්වේ. මෙහි ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වේ. ඉතිරි මුහුණත් හතර ම ත්‍රිකෝණාකාර වේ.

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ "හරි මැද" (එනම් සමචතුරස්‍රයේ විකර්ණ ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය) පිරමීඩයේ ශීර්ෂයට යා කළ විට ලැබෙන රේඛා ඛණ්ඩය ආධාරකයට ලම්බක වේ නම්, එවිට මෙම පිරමීඩයට **සමචතුරස්‍රාකාර ඍජු පිරමීඩයක්** යැයි කියනු ලැබේ.

එම රේඛා ඛණ්ඩයේ දිගට පිරමීඩයේ **ලම්බ උස** (හෝ වඩාත් සරලව, උස) යැයි කියනු ලැබේ. ආධාරකය මත නොපිහිටි දාර ඇල දාර ලෙස හැඳින්වේ. අප මෙම පාඩමේ දී සලකා බලනුයේ සමචතුරස්‍රාකාර සෘජු පිරමීඩවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම පිළිබඳව පමණි.

සටහන: චතුස්තලය ද පිරමීඩයක් ලෙස සැලකිය හැකි ය. එහි මුහුණත් සියල්ල ත්‍රිකෝණාකාර වේ. චතුස්තලයක ආධාරකය ලෙස ඕනෑ ම මුහුණතක් ගත හැකි ය. සෘජු පිරමීඩ යන්න ආධාරකය සමචතුරස්‍ර නොවූ පිරමීඩ සඳහා ද අර්ථ දැක්විය හැකි ය. නිදසුනක් ලෙස, ආධාරකය ඕනෑ ම සවිධි බහු - අස්‍රාකාර හැඩයක් ගන්නා අවස්ථාවේ දී සෘජු පිරමීඩ අර්ථ දැක්වෙන්නේ මෙසේ ය. එම සවිධි බහු - අස්‍රයේ සමමිතික රේඛා සියල්ල ගමන් කරන පොදු ලක්ෂ්‍යයක් ඇති අතර, එම පොදු ලක්ෂ්‍යය පිරමීඩයේ ශීර්ෂයට යා කරන රේඛා ඛණ්ඩය ආධාරකයට ලම්බක වේ නම් එම පිරමීඩය **සෘජු පිරමීඩයක්** ලෙස හැඳින්වේ. ආධාරකය සවිධි නොවූ බහුඅස්‍රාකාර හැඩයක් ගන්නා විට දී එම ආධාරකයේ "හරි මැද" ලෙස එම බහුඅස්‍රයේ කේන්ද්‍රකය ගත හැකි ය. කේන්ද්‍රකය පිළිබඳ සංකල්පය ගණිතය ඉහළට ඉගෙනීමේ දී ඔබට උගෙන ගත හැකි වනු ඇත.

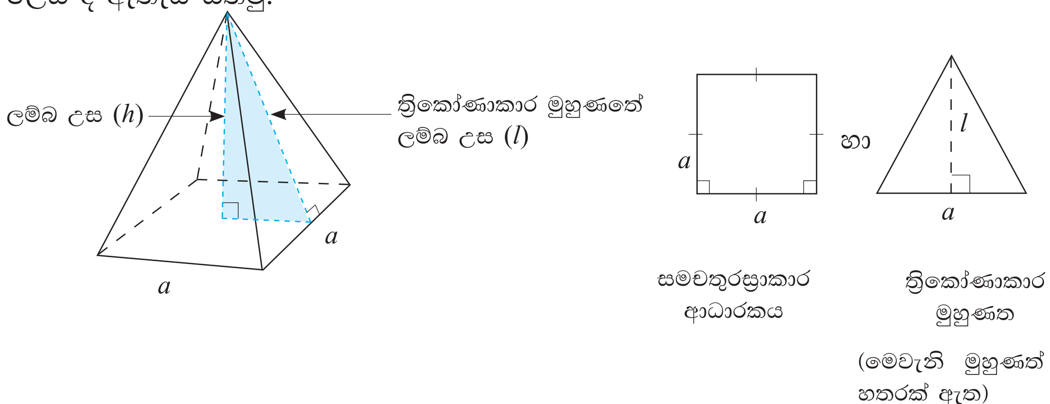
සමචතුරස්‍රාකාර සෘජු පිරමීඩයක ඇති වැදගත් ගුණයක් නම් ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් සියල්ල එකිනෙකට අංගසම වීමයි. එම නිසා එම මුහුණත්වල වර්ගඵල ද සමාන වේ.

තව ද සෑම ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ම එක් පාදයක් සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ එක් පාදයක් වන අතර, ඉතිරි පාද දෙක දිගින් සමාන වේ. එබැවින් මෙම ත්‍රිකෝණ සමද්විපාද වේ.

4.1 ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වන සෘජු පිරමීඩයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වන සෘජු පිරමීඩයක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා ආධාරකයේ වර්ගඵලයත් ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් හතරෙහි වර්ගඵලත් සොයා ඒවා සියල්ලේ ඓක්‍යය ගත යුතු ය.

ආධාරකයේ පැත්තක දිග හා ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස (පහත රූපය බලන්න) දී ඇති විට එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන ආකාර පිළිබඳව විමසා බලමු.
සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග a ද ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස l ද ලෙස දී ඇතැයි සිතමු.



මේ අනුව අපට පහත දැක්වෙන ලෙස මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවිය හැකි ය.

$$\left.\begin{array}{c}\text{සමචතුරස්‍රාකාර පිරමීඩයේ}\\ \text{මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{සමචතුරස්‍රාකාර}\\ \text{ආධාරකයේ}\\ \text{වර්ගඵලය}\end{array}\right\} + 4 \times \left\{\begin{array}{c}\text{ත්‍රිකෝණාකාර}\\ \text{මුහුණතක}\\ \text{වර්ගඵලය}\end{array}\right\}$$

$$= a \times a + 4 \times \frac{1}{2} \times a \times l$$

$$= a^2 + 2al$$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

$$\boxed{A = a^2 + 2al}$$

සමචතුරස්‍රාකාර සෘජු පිරමීඩයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සම්බන්ධ විසඳූ ගැටලු කීපයක් පිළිබඳ ව දැන් අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග 10 cm ද ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස 15 cm ද වූ සෘජු පිරමීඩයක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

ආධාරකයේ වර්ගඵලය $= 10 \times 10$

$= 100$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 10 \times 15$

$= 75$

ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණත් සියල්ලේ වර්ගඵලය $= 75 \times 4$

$= 300$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 100 + 300$

$= 400$

$\therefore$ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 400 cm^2 වේ.

නිදසුන 2

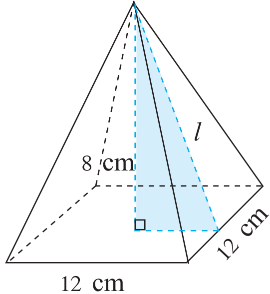
රූපයේ දැක්වෙන සෘජු පිරමීඩයේ සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග 12 cm වන අතර, පිරමීඩයේ ලම්බ උස 8 cmකි.

(i) ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස

(ii) ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය

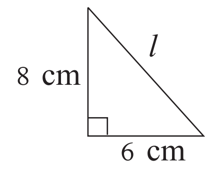
(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

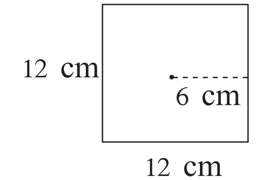
සොයන්න.



ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස සෙන්ටිමීටර l යැයි ගනිමු.
දී ඇති රූපයේ අඳුරු කර ඇති ත්‍රිකෝණය සලකමු.
පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව

(i) $l^2 = 8^2 + 6^2$
$= 64 + 36$
$= 100$
$\therefore l = \sqrt{100}$
$= 10$





$\therefore$ ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස 10 cm වේ.

(ii) ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10$

$= 60$

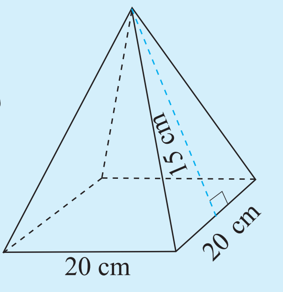
$\therefore$ ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක වර්ගඵලය 60 cm^2 වේ.

(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 12 \times 12 + 4 \times 60$
$= 144 + 240$
$= 384$

$\therefore$ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 384 cm^2 වේ.

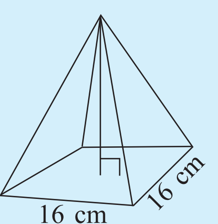
4.1 අභ්‍යාසය

1. සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග 20 cm වූ සෘජු පිරමීඩයක ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස 15 cm නම් පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

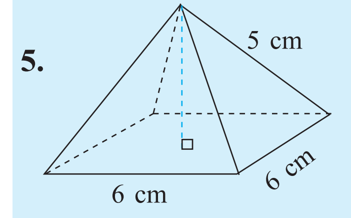


2. පැත්තක දිග 8 cm වූ සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත සෘජු පිරමීඩයක ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස 20 cm නම් පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

3. ආධාරකයේ පැත්තක දිග 16 cm වූ සෘජු පිරමීඩයක සෘජු උස 6 cm වේ.
(i) ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස
(ii) පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය
සොයන්න.



4. ආධාරකයේ පැත්තක දිග 20 cm වූ ද සමචතුරස්‍රාකාර සෘජු පිරමීඩයක ලම්බ උස 12 cm නම් පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. 

ආධාරකයේ පැත්තක දිග 6 cm වූ ඍජු පිරමීඩයක ඇල දාරයක දිග 5 cm නම් පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

6. ආධාරකයේ පැත්තක දිග 10 cm වූ ඍජු සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත පිරමීඩයක ඇල දාරයක දිග 13 cm නම් එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

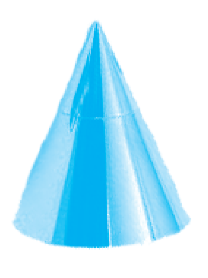
7. පැත්තක දිග 30 cm වූ සමචතුරස්‍ර ආධාරකයක් සහිත ඍජු පිරමීඩයක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2400 cm^2 වේ.
(i) එහි ශීර්ෂයේ සිට ආධාරකයේ පාදයකට ඇති ලම්බ දුර
(ii) පිරමීඩයේ උස
සොයන්න.

8. පැත්තක දිග 8 m වූ සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත ඍජු පිරමීඩාකාර කූඩාරමක් සාදා ඇති රෙද්දක වර්ගඵලය 80 m^2 වේ. කූඩාරමේ පතුල සඳහා රෙදි භාවිත කර නොමැති බව සලකා කූඩාරමේ උස සොයන්න.

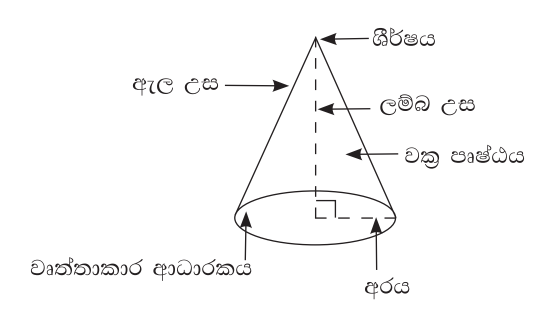
9. උස 4 m ද ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස 5 m ද වන සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත කූඩාරමක වහලය හා පතුල සඳහා රෙදි ඇතිරීමට නියමිත නම් අවශ්‍ය වන මුළු රෙදි ප්‍රමාණය සොයන්න.

10. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලේ පැත්තක දිග 16 m ද පිරමීඩයේ උස 6 m ද වන පරිදි වූ ඍජු පිරමීඩාකාර කූඩාරමක් තැනීමට අවශ්‍ය වේ. මෙහි පතුල ද ආවරණය වන පරිදි කූඩාරම සැකසීමට අවශ්‍ය වන රෙදි ප්‍රමාණය සොයන්න.

කේතුව


ඉහත දක්වා ඇත්තේ කේතු ආකාර වස්තූන් කිහිපයකි. කේතුවකට වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසක් හා වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසක් ඇති බව නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය. වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසට කේතුවේ ආධාරකය යැයි කියනු ලැබේ. වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස මත ඇඳි සරල රේඛා සියල්ල ගමන් කරන ලක්ෂ්‍යයට, කේතුවේ ශීර්ෂය යැයි කියනු ලැබේ.

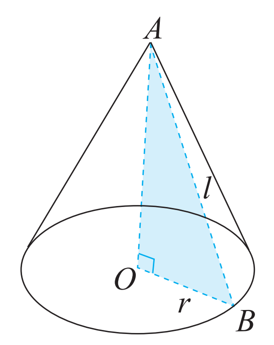


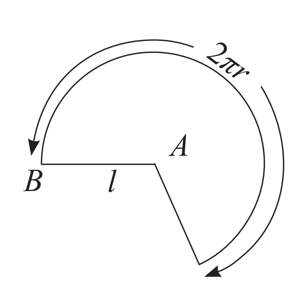
කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයට යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩය ආධාරකයට ලම්බක නම් එය **සෘජු වෘත්ත කේතුවක්** ලෙස හැඳින්වේ. කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ අරයට කේතුවේ අරය යැයි ද ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා ශීර්ෂය අතර දුරට කේතුවේ ලම්බ උස යැයි ද කියනු ලැබේ. තව ද, කේතුවේ ශීර්ෂය හා ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් අතර ඇති සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට ඇල රේඛාවක් යැයි ද එම රේඛා ඛණ්ඩයේ දිගට කේතුවේ ඇල උස යැයි ද කියනු ලැබේ.
කේතුවක අරය r මගින් ද උස h මගින් ද ඇල උස l මගින් ද සාමාන්‍යයෙන් දැක්වේ.

4.2 සෘජු වෘත්ත කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

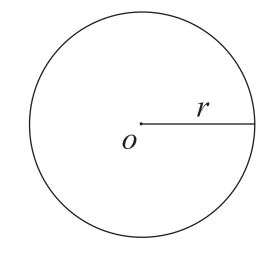
කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීමේ ක්‍රමයක් විස්තර කිරීම පිණිස තුනී ආස්තරයකින් සෑදි කුහර කේතුවක් සලකමු. මුලින් ම එය සෑදී ඇති පෘෂ්ඨ කොටස් මොනවාදැයි බලමු. ආධාරකය, වෘත්තාකාර හැඩයක් සහිත තල පෘෂ්ඨ කොටසකි. වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස, ඇල රේඛාවක් ඔස්සේ දිග හැරිය විට කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක හැඩය ගත් ආස්තරයකි.

කේතුවක අරය හා ඇල උස දී ඇති විට එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලයත් වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලයත් සොයා, ඒවායේ ඓක්‍යය ගත හැකි ය. වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය πr^2 සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගණනය කළ හැකි ය. වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස වන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය මෙසේ ගණනය කළ හැකි ය.





වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස



වෘත්තාකාර ආධාරකය

වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස එය දිග හැරීමෙන් ලැබෙන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය l වේ. එහි චාප දිග $2\pi r$ වේ (මක් නිසා ද යත්, එම චාප දිග වන්නේ ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය යි). දැන්, මෙම වෘත්ත ඛණ්ඩයට අදාළ කේන්ද්‍ර කෝණය θ නම් (10 ශ්‍රේණියේ දී කේන්ද්‍රික

ඛණ්ඩයක පරිමිතිය යටතේ උගත් පරිදි) $\frac{\theta}{360} \times 2\pi l = 2\pi r$ වේ.
එවිට
$\theta = \frac{2\pi r \times 360}{2\pi l}$ එනම් $\theta = \frac{360r}{l}$ වේ.

මෙම θ කේන්ද්‍ර කෝණය සහිත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක වර්ගඵලය වන්නේ (10 ශ්‍රේණියේ දී කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක වර්ගඵලය යටතේ උගත් පරිදි) $\frac{\theta}{360} \times \pi l^2$ ය. θ සඳහා මුල් සමීකරණයෙන් ආදේශ කිරීමෙන් වර්ගඵලය $\frac{360r}{l} \times \frac{\pi l^2}{360}$ ලෙස ලැබේ. මෙය සුළු කළ විට πrl ලැබේ. මේ අනුව, කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය πrl වේ. මේ අනුව,

කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය = {කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය} + {වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය}

$= \pi rl + \pi r^2$

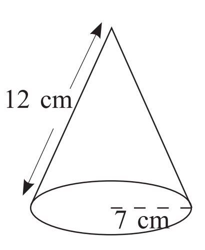
මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

$$A = \pi rl + \pi r^2$$

කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සම්බන්ධයෙන් විසඳූ ගැටලු කීපයක් පිළිබඳ ව දැන් අවධානය යොමු කරමු. මෙම පාඩමේ දී π හි අගය $\frac{22}{7}$ ලෙස ගනු ලැබේ.

නිදසුන 1

ඝන කේතුවක රූප සටහනක් පහත දැක්වේ. එහි අරය 7 cm ද ඇල උස 12 cm ද නම් කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12$

$= 264 \text{ cm}^2$

වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154 \text{ cm}^2$

∴ කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 264 + 154$

$= \underline{\underline{418 \text{ cm}^2}}$

නිදසුන 2

ආධාරකයේ පරිධිය 88 cm වූ කේතුවක ඇල උස 15 cm නම් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

වෘත්තාකාර ආධාරකයේ පරිධිය $= 88$ cm

ආධාරකයේ අරය සෙන්ටිමීටර r යැයි ගනිමු.

ඒ අනුව $2\pi r = 88$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88$$

$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$$

$$r = 14 \text{ cm}$$

කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 15$$

$$= 660$$

$\therefore$ කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය 660 cm^2 වේ.

නිදසුන 3

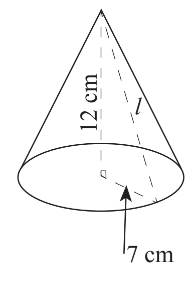
අරය 7 cm ද ලම්බ උස 12 cm ද වූ ඝන කේතුවක

(i) ඇල උස

(ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය

(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

දශමස්ථාන එකකට නිවැරදි ව සොයන්න.



කේතුවේ ඇල උස සෙන්ටිමීටර l යැයි ගනිමු.

පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව

(i) $l^2 = 7^2 + 12^2$

$$= 49 + 144$$

$$= 193$$

$$l = \sqrt{193}$$

$$= 13.8$$ (වර්ගමූලය සෙවීමේ බෙදීමේ ක්‍රමය මගින්)

$\therefore$ කේතුවේ ඇල උස ආසන්න වශයෙන් 13.8 cm වේ.

(ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 13.8$$

$$= 303.6$$

$\therefore$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය 303.6 cm^2 වේ.

(iii) වෘත්තාකාර කොටසේ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154 \text{ cm}^2$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 303.6 + 154$

$= 457.6$

$\therefore$ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 457.6 cm^2 වේ.

4.2 අභ්‍යාසය

1. ආධාරකයේ අරය 14 cm වූ ද ඇල උස 20 cm වූ ද ඍජු කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

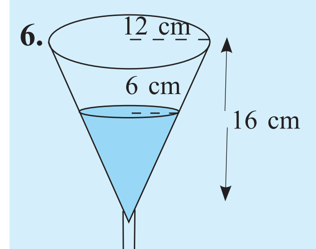
2. ආධාරකයේ අරය 7 cm වූ ද ලම්බ උස 24 cm වූ ද ඝන ඍජු කේතුවක
 (i) ඇල උස
 (ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය
 සොයන්න.

3. ආධාරකයේ පරිධිය 44 m වූ කේතුක හැඩයේ වැලි ගොඩක ඇල උස 20 m නම්
 (i) ආධාරකයේ අරය
 (ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය
 සොයන්න.

4. ආධාරකයේ අරය 10.5 cm වූ ද ඇල උස 15 cm වූ ද ඍජු කුහර කේතුවක පිටත පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. කේතුවක හැඩයෙන් යුත් ඝන වස්තුවක ඇල උස 14 cm වේ. එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය 396 cm^2 නම්
 (i) කේතුවේ අරය ගණනය කරන්න.
 (ii) ලම්බ උස ගණනය කරන්න.

6.



කේතුවක හැඩැති තුනී වීදුරු බඳුනක උසින් හරි අඩක් වන සේ පලතුරු බීම පුරවා ඇති ආකාරය රූපයේ දැක්වේ. වීදුරුවේ අරය 12 cm ද එහි කේතු කොටසේ උස 16 cm ද වේ. වීදුරුවේ පලතුරු බීම ගෑවී ඇති කොටසේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

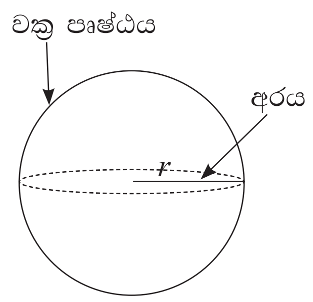
ගෝලය


යගුලිය


ටෙනිස් බෝලය


පා පන්දුව

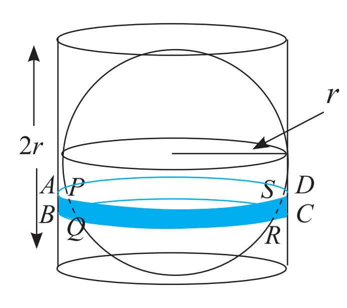
ගෝලීය හැඩය පිළිබඳ ඔබට අවබෝධයක් ඇතුවාට සැක නැත. අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට නියත දුරකින් ත්‍රිමාණ අවකාශයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය කුලකය ගෝලයක් ලෙස හැඳින්වේ. එම අචල ලක්ෂ්‍යයට ගෝලයේ කේන්ද්‍රය යැයි ද නියත දුරට අරය යැයි ද කියනු ලැබේ. ගෝලයට එක් වක්‍ර පෘෂ්ඨයක් පමණක් ඇති අතර, දාර හෝ ශීර්ෂ කිසිවක් නොමැත.



ගෝලයක අරය සාමාන්‍යයෙන් r මගින් දැක්වේ.

4.3 ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට උපකාරී වන, ආකිමිඩීස් විසින් නිරීක්ෂණය කළ සංසිද්ධියක් මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.



ගෝලයක අරයට සමාන අරයක් ද ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උසක් ද ඇති සිලින්ඩරයකට එම ගෝලයේ **පරිසිලින්ඩරය** යැයි කියනු ලැබේ.
එම ගෝලය සිලින්ඩරය තුළ ඇති විට සිලින්ඩරයේ වෘත්තාකාර තල මුහුණතට සමාන්තර ව කපන ලද ඕනෑ ම කැපුම් දෙකක් මගින් ගෝලයෙන් හා සිලින්ඩරයෙන් කැපෙන කොටස්වල වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵල සමාන බව ග්‍රීසියේ විසූ ආකිමිඩීස් නම් ගණිතඥයා විසින් ක්‍රිස්තු පූර්ව 225 දී පමණ පෙන්වා දෙන ලදි.
ඒ අනුව ඉහත රූපයේ පෙන්වා ඇති ගෝලයේ $PQRS$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය

සිලින්ඩරයේ $ABCD$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.
මේ නිසා ආකිමිඩීස් විසින් ඉදිරිපත් කළ ඉහත සම්බන්ධතාවට අනුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.

පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා $2\pi rh$ සූත්‍රය යෙදූ විට,

පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය $= 2\pi r \times 2r$
$= 4\pi r^2$
එබැවින් ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

නිදසුන 1

අරය 7 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$
$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$
$= 616$

$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 616 cm^2 වේ.

නිදසුන 2

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 1386 cm^2 නම් එහි අරය ගණනය කරන්න.
ගෝලයේ අරය සෙන්ටිමීටර r යැයි ගනිමු.

එවිට $4\pi r^2 = 1386$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1386$$

$$r^2 = \frac{1386 \times 7}{4 \times 22}$$

$$= \frac{441}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$= \frac{21}{2}$$

$$= 10.5$$

$\therefore$ ගෝලයේ අරය 10.5 cm වේ.

4.3 අභ්‍යාසය

1. අරය 3.5 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

2. අරය 14 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

3. පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 5544 cm^2 වූ ගෝලයක අරය සොයන්න.

4. අරය 7 cm වූ කුහර අර්ධ ගෝලයක බාහිර වක්‍ර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. විෂ්කම්භය 0.5 m වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

6. මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 1386 cm^2 වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක අරය සොයන්න.

සාරාංශය

- සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග a වූ ද ත්‍රිකෝණාකාර මුහුණතක ලම්බ උස l වූ ද ඍජු ඝන පිරමීඩයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

  $A = a^2 + 2al$

- ආධාරකයේ අරය r ද ඇල උස l වූ ඍජු ඝන වෘත්ත කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

  $A = \pi rl + \pi r^2$

- අරය r වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්

  $A = 4\pi r^2$ වේ.

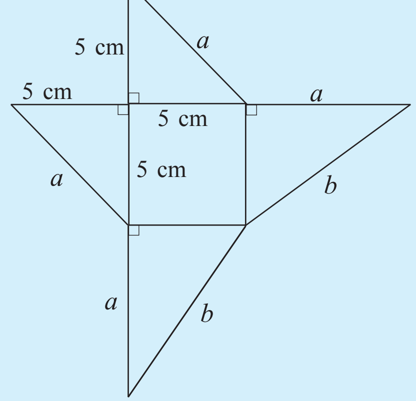
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. පිරමීඩයක් සෑදීමට යොදා ගන්නා ලද පතරොමක් පහත දැක්වේ.

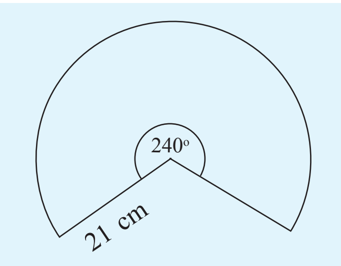
(i) එහි a හා b මගින් දක්වා ඇති අගය ගණනය කරන්න.

(ii) මෙම පතරොම භාවිතයෙන් සාදා ගන්නා පිරමීඩය ඍජු පිරමීඩයක් නොවීමට හේතුව කුමක් ද?

(iii) පිරමීඩයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



2. රූප සටහනින් පෙන්වා ඇති කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ආකාරයේ වූ ලෝහ තහඩුවක් යොදාගනිමින් ඍජු කේතුවක් සාදා ගනු ලැබේ.



(i) සාදා ගත් කේතුවේ පතුලට වෘත්තාකාර තහඩුවක් සවිකරනු ලැබේ. එම කොටසේ අරය ගණනය කරන්න.

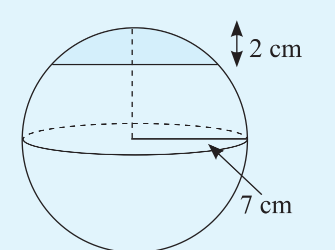
(ii) කේතුව සාදා ගත් පසු එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

3. කේතුවක ඇල උස හා ලම්බ උස අතර අනුපාතය 5 : 4 වේ. කේතුවේ ආධාරකයේ අරය 6 cm නම්,

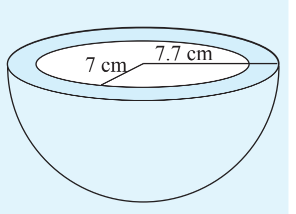
(i) කේතුවේ ඇල උස ගණනය කරන්න.

(ii) කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

4. අරය 7 cm ක් වූ ගෝලයක මුදුනේ සිට ඍජු උස 2 cm ක් පහළට තීන්ත ආලේප කර ඇත් නම් තීන්ත ආලේප කර ඇති කොටසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න. (ඉඟිය: පරිසිලින්ඩරය පිළිබඳ දැනුම යොදාගන්න)



5. අර්ධ ගෝල හැඩැති මැටි භාජනයක අභ්‍යන්තර අරය 7 cm ද බාහිර අරය 7.7 cm ද නම් භාජනයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



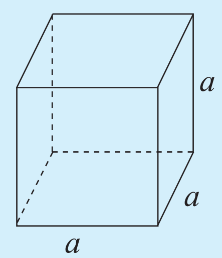
5 ඝන වස්තුවල පරිමාව

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

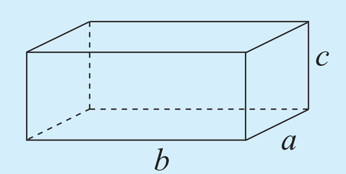
සෘජු පිරමීඩයක, සෘජු කේතුවක හා ගෝලයක පරිමාව ගණනය කිරීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

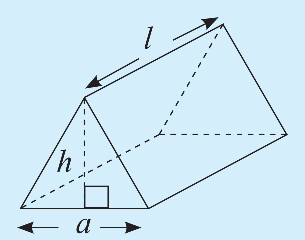
1. මීට පෙර ඔබ විසින් අධ්‍යයනය කර ඇති ඝන වස්තු කීපයක රූප සටහන් පහත දැක්වේ. ඒවායේ පරිමාව සෙවූ ආකාරය මතකයට නගා ගනිමින්, දී ඇති වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.



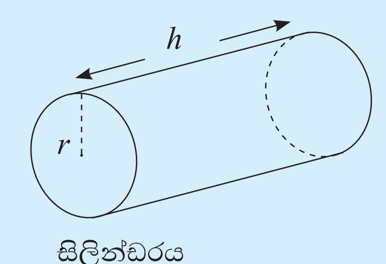
ඝනකය



ඝනකාභය



ත්‍රිකෝණාකාර ප්‍රිස්මය



සිලින්ඩරය

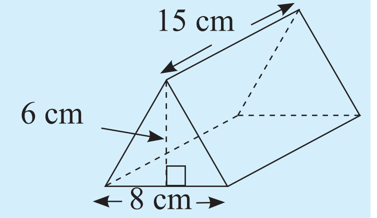
වස්තුව	හරස්කඩ වර්ගඵලය	පරිමාව
ඝනකය		
ඝනකාභය		
ත්‍රිකෝණාකාර ප්‍රිස්මය		
සිලින්ඩරය		

2. පැත්තක දිග 10 cm වූ ඝනකයක පරිමාව ගණනය කරන්න.

3. දිග 15 cm ද පළල 10 cm ද උස 8 cm ද වූ ඝනකාභයක පරිමාව ගණනය කරන්න.

4. අරය 7 cm ද උස 20 cm ද වන සිලින්ඩරයක පරිමාව ගණනය කරන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන ප්‍රිස්මයේ පරිමාව ගණනය කරන්න.

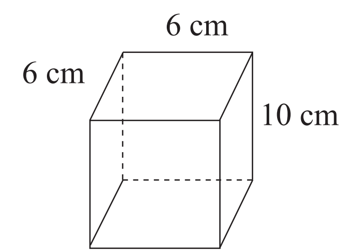


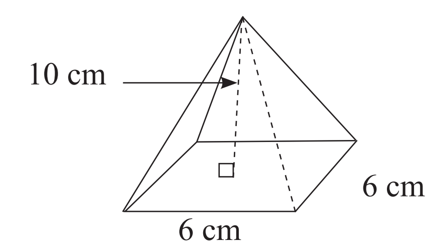
5.1 පතුල සමචතුරස්‍රාකාර ඍජු පිරමීඩයක පරිමාව

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත ඍජු පිරමීඩයක පරිමාව සෙවීම සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනැගීමට දැන් අවධානය යොමු කරමු. මේ සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයේ, පැත්තක දිග 6 cm බැගින් වන සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත උස 10 cm වන කුහර ඝනකාභයක් හා පැත්තක දිග 6 cm බැගින් වන සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත උස 10 cm වන ඍජු කුහර පිරමීඩයක් තුනී කාඩ්බෝඩ් භාවිතයෙන් සකස් කර ගන්න.





සාදා ගත් පිරමීඩ හැඩැති භාජනය සිහින් වැලිවලින් සම්පූර්ණයෙන්ම පුරවා ගන්න. එසේ පුරවා ගත් සිහින් වැලි සියල්ල ඝනකාභ හැඩැති භාජනයට දමන්න. ඝනකාභ හැඩැති භාජනය පිරවීමට මේ ආකාරයට පිරමීඩාකාර භාජනයෙන් කී වාරයක් දැමිය යුතු දැයි නිරීක්ෂණය කරන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමේ දී ඝනකාභ හැඩැති බඳුන සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට, පිරමීඩ හැඩැති බඳුන සම්පූර්ණයෙන් වැලිවලින් පුරවා තුන් වාරයක් දැමිය යුතු බව ඔබ නිරීක්ෂණය කරන්නට ඇත.

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග a ද උස h ද වූ ඝනකාභයක් හා සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග a ද ලම්බ උස h ද වූ ඍජු ප්‍රිස්මයක් සලකන්න. ක්‍රියාකාරකමට අනුව, පිරමීඩයේ පරිමාව $\times 3 =$ ඝනකාභයේ පරිමාව

$\therefore$ පිරමීඩයේ පරිමාව $= \frac{1}{3} \times$ ඝනකාභයේ පරිමාව

$= \frac{1}{3} \times$ ආධාරකයේ වර්ගඵලය $\times$ ලම්බ උස

$$= \frac{1}{3} \times (a \times a) \times h$$

$$= \frac{1}{3} a^2h$$

පිරමීඩයේ පරිමාව $= \frac{1}{3} a^2h$

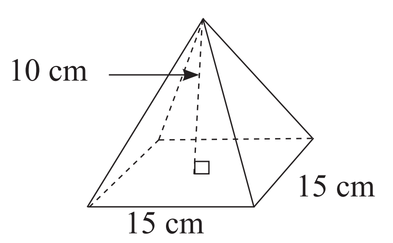
නිදසුන 1

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග 15 cm ද උස 10 cm ද වූ ඍජු පිරමීඩයක පරිමාව සොයන්න.

පිරමීඩයේ පරිමාව $= \frac{1}{3} a^2h$

$$= \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 10$$

$$= 750$$



$\therefore$ පිරමීඩයේ පරිමාව 750 cm^3 වේ.

නිදසුන 2

සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත පිරමීඩයක පරිමාව 400 cm^3 කි. එහි උස 12 cm නම් ආධාරකයේ පැත්තක දිග සොයන්න.
ආධාරකයේ පැත්තක දිග සෙන්ටිමීටර a යැයි ගනිමු.

පිරමීඩයේ පරිමාව $= \frac{1}{3} a^2h$

$$\therefore \frac{1}{3} a^2h = 400$$

$$\therefore \frac{1}{3} a^2 \times 12 = 400$$

$$\therefore 4a^2 = 400$$

$$\therefore a^2 = 100$$

$$= 10^2$$

$$\therefore a = 10$$

$\therefore$ ආධාරකයේ පැත්තක දිග 10 cm වේ.

5.1 අභ්‍යාසය

1. සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ පැත්තක දිග 5 cm වූ පිරමීඩයක උස 9 cm නම්, එහි පරිමාව ගණනය කරන්න.

2. සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය 36 cm^2 වූ පිරමීඩයක උස 10 cm නම්, එහි පරිමාව ගණනය කරන්න.

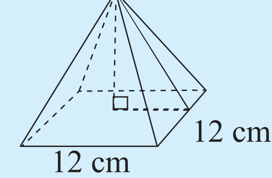
3. සමචතුරස්‍රාකාර පිරමීඩයක උස 12 cm නම් හා එහි පරිමාව 256 cm^3 නම්, ආධාරකයේ පැත්තක දිග ගණනය කරන්න.

4. සමචතුරස්‍රාකාර පිරමීඩයක උස 5 cm ද එහි පරිමාව 60 cm^3 ද නම් පිරමීඩයේ ආධාරකයේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

5. ආධාරකයේ පැත්තක දිග 9 cm වූ සමචතුරස්‍රාකාර පිරමීඩයක පරිමාව 216 cm^3 නම්, එහි උස ගණනය කරන්න.

6. ආධාරකයේ වර්ගඵලය 16 cm^2 වූ සමචතුරස්‍රාකාර පිරමීඩයක පරිමාව 80 cm^3 නම්, එහි උස ගණනය කරන්න.

7. සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත පිරමීඩයක ආධාරකයේ පැත්තක දිග 12 cm ද ඇල දාරයක දිග 10 cm ද වේ. පිරමීඩයේ,
 (i) උස
 (ii) පරිමාව
ගණනය කරන්න.
(පිළිතුර කරණි ආකාරයෙන් තබන්න.)



8. සමචතුරස්‍රාකාර ආධාරකයක් සහිත පිරමීඩයක ආධාරකයේ පැත්තක දිග 10 cm ද ඇල දාරයේ දිග 13 cm ද වේ. පිරමීඩයේ,

 (i) උස
 (ii) පරිමාව

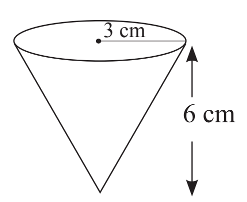
ගණනය කරන්න. (පිළිතුර කරණි ආකාරයෙන් තබන්න.)

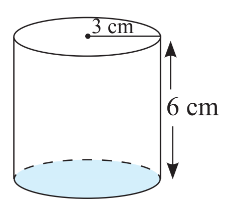
5.2 සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව

සෘජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව සෙවීම සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනැගීම පිළිබඳ ව අවධානය යොමු කරමු. ඒ සඳහා සෘජු වෘත්ත කේතුවක් හා සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් යොදාගෙන පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයේ සමාන අර හා සමාන උස සහිත ආධාරකය රහිත කේතුවකුත් පතුල සහිත නමුත් පියන රහිත සිලින්ඩරයකුත් කාඩ්බෝඩ් භාවිතයෙන් සකස් කර ගන්න.





සාදා ගත් කේතු හැඩැති භාජනය සිහින් වැලිවලින් සම්පූර්ණයෙන්ම පුරවා ගන්න. එසේ පුරවා ගත් සිහින් වැලි සියල්ල සිලින්ඩරාකාර භාජනයට දමන්න. සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන්ම පිරවීමට මේ ආකාරයට කේතු හැඩැති භාජනයෙන් කී වරක් වැලි දැමිය යුතු දැයි නිරීක්ෂණය කරන්න.

සිලින්ඩරාකාර භාජනය සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට කේතු ආකාර භාජනයෙන් තුන් වාරයක් සිහින් වැලි පුරවා දැමිය යුතු බව ඔබට නිරීක්ෂණය කිරීමට හැකි වනු ඇත. ඒ අනුව,

$$\text{කේතුවේ පරිමාව} \times 3 = \text{සිලින්ඩරයේ පරිමාව}$$

$$\text{කේතුවේ පරිමාව} = \frac{1}{3} \times \text{සිලින්ඩරයේ පරිමාව}$$

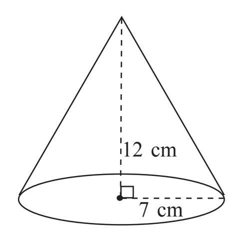
අරය r ද උස h ද වූ සිලින්ඩරයක පරිමාව $\pi r^2 h$ මගින් ලැබෙන බව මීට ඉහත දී ඔබ උගෙන ඇත. ඒ නිසා අරය r හා උස h වූ කේතුවක පරිමාව $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් ලැබේ.

$$\boxed{\text{කේතුවේ පරිමාව} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

මෙම පාඩමේ ගණනය කිරීම්වලදී πහි අගය $\frac{22}{7}$ ලෙස ගනු ලැබේ.

නිදසුන 1

අරය 7 cm ද උස 12 cm ද වූ කේතුවක පරිමාව සොයන්න.



$$\text{කේතුවේ පරිමාව} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12$$
$$= 616$$

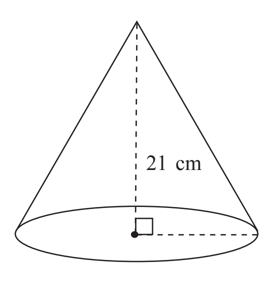
$\therefore$ කේතුවේ පරිමාව 616 cm^3 වේ.

නිදසුන 2

ආධාරකයේ පරිධිය 44 cm වූ කේතුවක ලම්බ උස 21 cm නම් කේතුවේ පරිමාව සොයන්න.

ආධාරකයේ පරිධිය = 44 cm

කේතුවේ අරය සෙන්ටිමීටර r යැයි ගනිමු.



$$\therefore 2\pi r = 44$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

$$\therefore r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$$

$$= 7$$

$\therefore$ කේතුවේ අරය 7 cm වේ.

$$\text{කේතුවේ පරිමාව} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 21$$

$$= 1078$$

$\therefore$ කේතුවේ පරිමාව 1078 cm^3 වේ.

නිදසුන 3

අරය 7 cm ද ඇල උස 25 cm ද වූ කේතුවක

(i) උස

(ii) පරිමාව

සොයන්න.

කේතුවේ උස සෙන්ටිමීටර h මගින් දක්වමු. පහත රූපයේ දැක්වෙන ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා h සොයමු.

(i)

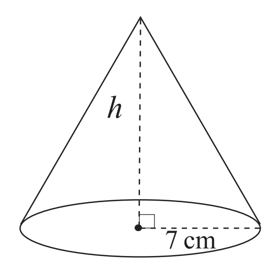
$$h^2 + 7^2 = 25^2$$

$$h^2 + 49 = 625$$

$$h^2 = 625 - 49$$

$$h = \sqrt{576}$$

$$h = 24$$



$\therefore$ කේතුවේ උස 24 cm වේ.

(ii) කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

$= 1232$

$\therefore$ කේතුවේ පරිමාව 1232 cm^3 වේ.

නිදසුන 4

අරය 3.5 cm ද පරිමාව 154 cm^3 ද වූ කේතුවක සෘජු උස සොයන්න.

කේතුවේ සෘජු උස සෙන්ටිමීටර h මගින් දක්වමු.

කේතුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore 154 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$ $\quad$ ($3.5 = \frac{7}{2}$ නිසා)

$\therefore h = \frac{154 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2}{22 \times 7 \times 7}$

$= 12$

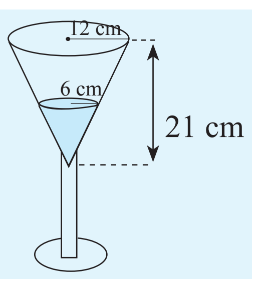
$\therefore$ කේතුවේ සෘජු උස 12 cm වේ.

5.2 අභ්‍යාසය

1. අරය 7 cm ද උස 12 cm ද වන කේතුවක පරිමාව ගණනය කරන්න.
2. විෂ්කම්භය 21 cm ද උස 25 cm ද වූ කේතුවක පරිමාව ගණනය කරන්න.
3. ඇල උස 13 cm ද පතුලේ අරය 5 cm වූ ද කේතුවක පරිමාව ගණනය කරන්න.
4. විෂ්කම්භය 12 cm ද ඇල උස 10 cm ද වූ කේතුවක පරිමාව ගණනය කරන්න.
5. පරිමාව 616 cm^3 වූ කේතුවක උස 12 cm නම් කේතුවේ අරය ගණනය කරන්න.
6. පරිමාව 6468 cm^3 වූ කේතුවක උස 14 cm නම් කේතුවේ විෂ්කම්භය ගණනය කරන්න.
7. පතුලේ පරිධිය 44 cm වූ සෘජු කේතුවක ඇල උස 25 cmකි. කේතුවේ,
   (i) ආධාරකයේ අරය
   (ii) උස
   (iii) පරිමාව

   ගණනය කරන්න.
8. කේතු හැඩැති භාජනයක ආධාරකයේ පරිධිය 88 cm ද සෘජු උස 12 cm ද වේ නම්, භාජනයේ පරිමාව ගණනය කරන්න.
9. අරය 14 cm ද උස 30 cm ද වූ ඝන ලෝහ සිලින්ඩරයක් උණු කර, අරය 7 cm වූ ද උස 15 cm වූ ද ඝන ලෝහ කේතු කීයක් සෑදිය හැකි ද?

10. ඍජු කේතුවක ආකාරයේ වූ බඳුනක අරය 12 cm ද උස 21 cm ද වේ. එහි උසින් හරි අඩක් ජලයෙන් පුරවා ඇත් නම්, බඳුන සම්පූර්ණයෙන් පිරවීමට තව කොපමණ ජල පරිමාවක් දැමිය යුතු දැයි සොයන්න.

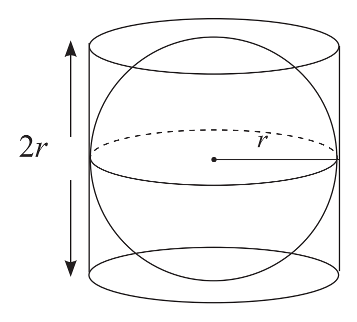


5.3 ගෝලයක පරිමාව

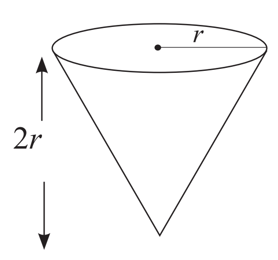
ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයා ගැනීම සඳහා යොදා ගත් 'පරිසිලින්ඩරය' නම් උපකරණය ඇසුරෙන් ම ගෝලයක පරිමාව සෙවීමේ ක්‍රමයක් ද ආකිමිඩිස් නම් ගණිතඥයා විසින් පැහැදිලි කරන ලදි. ඒ අනුව සැලසුම් කර ඇති පහත ක්‍රියාකාරකම ඇසුරෙන් ගෝලයක පරිමාව සෙවීම සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගමු.

ක්‍රියාකාරකම

මේ සඳහා අරය 3cm පමණ වූ ගෝලයක් ගන්න. ගෝලයේ අරයට සමාන අරයකින් හා ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උසකින් යුත් දෙපසම විවෘත සිලින්ඩරයක් තුනී කාඩ්බෝඩ් භාවිතයෙන් තනා ගන්න. ඉන් පසු රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ගෝලය පරිසිලින්ඩරය තුළට සීරුවෙන් ඇතුළු කරන්න.



එවිට ගෝලය පරිසිලින්ඩරය තුල මුළු අවකාශයම අයත්කර නොගන්නා බවත් හිස් අවකාශයක් ඉතිරි වී ඇති බවත් පැහැදිලි වේ. එම හිස් අවකාශයේ පරිමාව සොයා ගැනීම සඳහා පරිසිලින්ඩරයේ ඉහල කොටස සිහින් වැලිවලින් පුරවා ගන්න. එම වැලි ඉවතට නොයන සේ කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක් මගින් තද කර තබා ගෙන යට කොටස ඉහළට හරවා ගන්න. දැන් එම කොටස ද සම්පූර්ණයෙන් වැසී යන සේ සිහින් වැලි පුරවා ගන්න.
අනතුරුව පරිසිලින්ඩරයේ අරයට සමාන අරයකින් හා පරිසිලින්ඩරයේ උසට සමාන උසකින් යුත් කුහර කේතුවක් තුනී කාඩ්බෝඩ් භාවිතයෙන් සකස් කර ගන්න.



දැන් පරිසිලින්ඩරය තුළට පුරවා ඇති සිහින් වැලි අපතේ නොයන පරිදි සම්පූර්ණයෙන් ඉවත් කර ගෙන, ඉහත සාදා ගත් කුහර කේතුව තුළට දමන්න. එවිට එම වැලිවලින් කුහර කේතුව සම්පූර්ණයෙන් පිරී යන බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

මෙම ක්‍රියාකාරකමට අනුව,

පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාව = ගෝලයේ පරිමාව + කේතුවේ පරිමාව

බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත. ඒ අනුව පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාවෙන් කේතුවේ පරිමාව අඩු කළ විට ගෝලයේ පරිමාව ලැබෙන බව පැහැදිලි වනු ඇත. මේ අනුව,

ගෝලයේ පරිමාව = පරිසිලින්ඩරයේ පරිමාව − කේතුවේ පරිමාව

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$

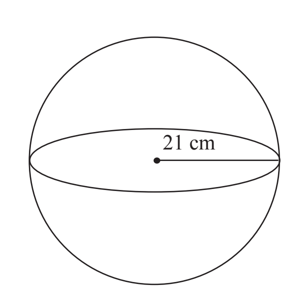
$= \frac{2}{3} \pi r^2 \times 2r$ ($h = 2r$ නිසා)

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3} \pi r^3$

නිදසුන 1

අරය 21 cm වූ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.



ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3} \pi r^3$

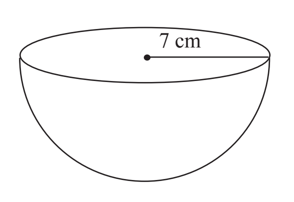
$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

$= 38\,808$

$\therefore$ ගෝලයේ පරිමාව 38 808 cm^3 වේ.

නිදසුන 2

අරය 7 cm වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.



අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

≈ 718.67

$\therefore$ අර්ධ ගෝලයේ පරිමාව 718.67 cm^3 වේ.

නිදසුන 3

පරිමාව $113\frac{1}{7}$ cm^3 වූ කුඩා වීදුරු බෝලයක අරය සොයන්න.
ගෝලයේ අරය සෙන්ටිමීටර r යැයි ගනිමු.

ගෝලයේ පරිමාව $= \frac{4}{3} \pi r^3$

$\therefore \quad \frac{4}{3} \pi r^3 = 113\frac{1}{7}$

$\therefore \quad r^3 = \frac{792}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{22}$

$= 27$

$= 3^3$

$\therefore \quad r = 3$

$\therefore$ ගෝලයේ අරය 3 cm වේ.

5.3 අභ්‍යාසය

1. අරය 7 cm වූ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
2. විෂ්කම්භය 9 cm වූ ගෝලයක පරිමාව $381\frac{6}{7}$ cm^3 බව පෙන්වන්න.
3. ගෝලාකාර ග්‍රහ වස්තුවක අරය 2.1 km නම්, ග්‍රහ වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.
4. අරය සෙන්ටිමීටර 10.5ක් වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක පරිමාව සොයන්න.
5. ගෝලයක පරිමාව $11498\frac{2}{3}$ cm^3 නම්, එහි අරය ගණනය කරන්න.
6. අරය 7 cm වූ ලෝහ ගෝල 8ක් උණු කර, ලෝහ අපතේ නොයන ලෙස තනි ලෝහ ගෝලයක් සාදනු ලැබේ. එහි අරය ගණනය කරන්න.
7. අරය 12 cm වූ ඝන අර්ධ ගෝලාකාර ලෝහ කොටසක් උණු කර, අරය 3 cm බැගින් වූ කුඩා ඝන ලෝහ ගෝල 32 ක් සෑදිය හැකි බව පෙන්වන්න.

සාරාංශය

- ආධාරකයේ පැත්තක දිග a වූ ද ලම්බ උස h වූ ද සමචතුරස්‍රාකාර ඍජු පිරමීඩයක පරිමාව V නම්,

  $V = \frac{1}{3}a^2h$ වේ.

- ආධාරකයේ අරය r සහ ලම්බ උස h වූ ඍජු වෘත්ත කේතුවක පරිමාව V නම්,

  $V = \frac{1}{3}\pi r^2h$ වේ.

- අරය r වන ගෝලයක පරිමාව V නම්,

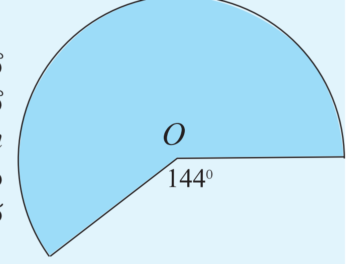
  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ වේ.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. පැත්තක දිග 12 cm වූ ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර හරස්කඩක් සහිත, දිග 22 cm වූ ඝන ලෝහ කුට්ටියක් උණු කර, අරය 3 cm වූ ඝන ගෝල සාදනු ලබයි නම්, සෑදිය හැකි මුළු ඝන ලෝහ ගෝල ගණන කීය ද?

2. අරය 3.5 cm වූ ඝන ලෝහ ගෝලයක් උණු කර, එයින් එම අරයෙන් ම යුත් ඝන කේතුවක් සාදන ලදි. වාත්තු කිරීමේ දී ලෝහ අපතේ නොයන ලදැයි සලකා කේතුවේ උස ගණනය කරන්න.

3. රූපයේ දැක්වෙන කේන්ද්‍රය O හරහා අරය r වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ආකාරයේ වූ ලෝහ තහඩුව භාවිතයෙන් ශීර්ෂය O හා ඇල උස r වූ කේතු ආකාරයේ බඳුනක් සාදනු ලැබීය. අරය a බැගින් වූ ගෝලාකාර අයිස් කැට n ගණනක් මෙම කේතුව තුළට (ශීර්ෂය යටි අතට සිටින සේ තබා) දැමූ විට අයිස් දිය වූ ජලයෙන් බඳුන පිරී ගියේ නම් $125na^3 = 9r^3$ බව පෙන්වන්න.



6 ද්විපද ප්‍රකාශන

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතය ප්‍රසාරණය කිරීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

$x + y$ ආකාරයේ ද්විපද ප්‍රකාශනයක වර්ගායිතය $(x + y)^2$ මගින් දැක්වූ බවත්, එයින් අදහස් වූයේ $(x + y)(x + y)$ ගුණිතය බවත්, එම ගුණිතය ප්‍රසාරණය කළ විට $x^2 + 2xy + y^2$ ලෙස ලැබුණු බවත් ඔබ මීට කලින් උගෙන ඇත. තව ද $(x - y)^2$ ප්‍රසාරණය කළ විට $x^2 - 2xy + y^2$ ලෙස ලැබුණු බවත් ඔබ උගෙන ඇත. ද්විපද ප්‍රකාශනවල වර්ගායිත ප්‍රසාරණය සම්බන්ධව ඔබ මෙතෙක් උගෙන ඇති විෂය කරුණු නැවත මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. හිස්තැන් පුරවන්න.

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + ...$
b. $(a - b)^2 = ... - 2ab + b^2$
c. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + ...$
d. $(y + 3)^2 = y^2 + ...\ + 9$
e. $(a - 5)^2 = ...\ - 10a + 25$
f. $(b - 1)^2 = b^2\ .....\ +\ .....$
g. $(4 + x)^2 = 16 + ...\ .....$
h. $(7 - t)^2 = 49\ .....\ + t^2$
i. $(2x + 1)^2 = 4x^2\ .....\ +\ 1$
j. $(3b - 2)^2 = ... - 12b\ ......$

2. ප්‍රසාරණය කරන්න.

a. $(2m + 3)^2$ **b.** $(3x - 1)^2$ **c.** $(5+2x)^2$
d. $(2a + 3b)^2$ **e.** $(3m - 2n)^2$ **f.** $(2x + 5y)^2$

3. ද්විපද ප්‍රකාශනයක වර්ගායිතයක් ලෙස ලිවීමෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් වර්ගය අගයන්න.

a. 32^2 **b.** 103^2 **c.** 18^2 **d.** 99^2

6.1 ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතය

$a + b$ ආකාරයේ ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ $(a + b)^3$ යි. එනම්, $(a + b)$ හි තුනෙහි බලය යි. වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත් $(a + b)^2$ යන්න නැවත $(a + b)$ මගින් ගුණ කිරීමෙන් ලැබෙන ප්‍රකාශනයයි.

පහත දැක්වෙන, තුනෙහි බල ලෙස දක්වා ඇති ප්‍රකාශන ලියා තිබෙන ආකාර හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

$$3^3 = 3 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$x^3 = x \times x^2 = x \times x \times x$$
$$(2x)^3 = (2x) \times (2x)^2 = (2x) \times (2x) \times (2x) = 8x^3$$

එසේ ම,

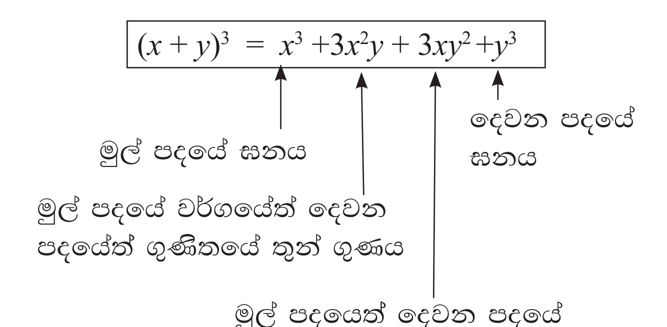
$$(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2 = (x + 1)\,(x + 1)\,(x + 1)$$
$$(a - 2)^3 = (a - 2)(a - 2)^2 = (a - 2)\,(a - 2)\,(a - 2)$$
$(3 + m)^3 = (3 + m)(3 + m)^2 = (3 + m)\,(3 + m)\,(3 + m)$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

ද්විපද ප්‍රකාශනවල වර්ගායිත ප්‍රසාරණය කළ ආකාරයට ම ද්විපද ප්‍රකාශනවල ඝනායිත ද ප්‍රසාරණය කළ හැකි ය. එය පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් අධ්‍යයනය කරමු.

නිදසුන 1

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2$$
$$= (x + y)\,(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= \underline{\underline{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}}$$

මේ අනුව $(x + y)$ ආකාරයේ ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතයේ ප්‍රසාරණය සූත්‍රයක් ලෙස මතක තබා ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන රටාව භාවිත කරමු.



ඒ අනුව,

$(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

එසේ ම, $(a + 2)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2 + 3 \times a \times 2^2 + 2^3$ ලෙස ලියා, එය තව දුරටත්, $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ ලෙස සුළු කළ හැකි ය.

දැන් ඉහත ආකාරයට ම ගුණ කොට $(x-y)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලබා ගන්නා ආකාරය සලකා බලමු.

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x-y)\,(x-y)^2\\ &= (x-y)\quad(x^2-2xy+y^2)\\ &= x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-y^3\\ &= \underline{\underline{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}}\end{aligned}$$

මෙම ප්‍රසාරණය ලබා ගත හැකි තවත් ක්‍රමයක් දැන් සලකා බලමු.

මෙහි $x-y$ යන්න $x+\ (-y)$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය. එවිට එය ඔබ මුලින් දුටු ආකාරයේ ප්‍රකාශනයක් ලෙස සැලකිය හැකි ය. ඒ අනුව $(x-y)^3$ යන්න $\{x+(-y)\}^3$ලෙස ලියා දැක්විය හැකි ය. දැන් මෙම ඝනායිතයෙහි ප්‍රසාරණය සලකමු.

$$\begin{aligned}(x-y)^3 = \{x+(-y)\}^3 &= x^3+3\times x^2\times(-y)+3\times x\times(-y)^2+(-y)^3\\ &= \underline{\underline{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}}\end{aligned}$$

ඉහත පද සුළු කිරීම්වල දී $(-y)^2=y^2$ හා $(-y)^3=-y^3$ යන ගුණ යොදා ගෙන ඇති බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

ඒ අනුව, $(m-n)^3 = m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$ ලෙස ද
$(p-q)^3 = p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

ඉහත ආකාර දෙකෙන් ම $(x-y)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලබා ගත හැකි අතර, ඔබ කැමති ක්‍රමයකට මෙය සිදු කළ හැකි ය.

දැන් සංඛ්‍යා ද අඩංගු ද්විපද ප්‍රකාශන කිහිපයක ඝනායිත ප්‍රසාරණය කරන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 2

$$\begin{aligned}(x+5)^3 &= x^3+3\times x^2\times 5+3\times x\times 5^2+5^3\\ &= \underline{\underline{x^3+15x^2+75x+125}}\end{aligned}$$

නිදසුන 3

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= 1^3+3\times 1^2\times x+3\times 1\times x^2+x^3\\ &= \underline{\underline{1+3x+3x^2+x^3}}\end{aligned}$$

නිදසුන 4

$$(y-4)^3 = y^3 + 3 \times y^2 \times (-4) + 3 \times y \times (-4)^2 + (-4)^3$$
$$= \underline{\underline{y^3 - 12y^2 + 48y - 64}}$$

හෝ

$$(y-4)^3 = y^3 - 3 \times y^2 \times 4 + 3 \times y \times 4^2 - 4^3$$
$$= \underline{\underline{y^3 - 12y^2 + 48y - 64}}$$

නිදසුන 5

$$(5-a)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \times (-a) + 3 \times 5 \times (-a)^2 + (-a)^3$$
$$= \underline{\underline{125 - 75a + 15a^2 - a^3}}$$

හෝ

$$(5-a)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times a + 3 \times 5 \times a^2 - a^3$$
$$= \underline{\underline{125 - 75a + 15a^2 - a^3}}$$

නිදසුන 6

$$(-2+a)^3 = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 \times a + 3 \times (-2) \times a^2 + a^3$$
$$= \underline{\underline{-8 + 12a - 6a^2 + a^3}}$$

නිදසුන 7

$$(-3-b)^3 = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \times (-b) + 3 \times (-3) \times (-b)^2 + (-b)^3$$
$$= \underline{\underline{-27 - 27b - 9b^2 - b^3}}$$

හෝ

$$\left[-1\,(3+b)\right]^3 = (-1)^3\,(3+b)^3$$
$$= -1\,(3^3 + 3 \times 3^2 \times b + 3 \times 3 \times b^2 + b^3)$$
$$= -1\,(27 + 27b + 9b^2 + b^3)$$
$$= \underline{\underline{-27 - 27b - 9b^2 - b^3}}$$

නිදසුන 8

$(x-3)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලියා $x = 4$ සඳහා $(4-3)^3 = 4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$(x-3)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$

$x = 4$ ආදේශයෙන්

වම් පැ. $= (4-3)^3$
$= 1$

දකුණු පැ. $= x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3$
$= 4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3$
$= 1$

වම් පැ. = දකුණු පැ.

එමනිසා $(4-3)^3 = 4^3 - 3^2 \times 4^2 + 3^3 \times 4 - 3^3$ වේ.

6.1 අභ්‍යාසය

1. සුදුසු වීජීය පද හෝ සංඛ්‍යා හෝ වීජීය ලකුණු (+ හෝ –) හෝ යොදා ගනිමින් හිස්තැන් පුරවන්න.

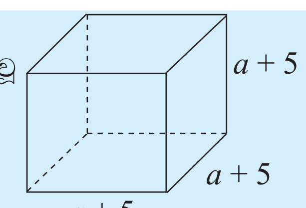
a. $(x+3)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3 = x^3 + \square + \square + 27$
b. $(y+2)^3 = y^3 + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + 2^3 = y^3 + 6y^2 + \square + \square$
c. $(a-5)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times (-5) + 3 \times a \times (-5)^2 + (-5)^3 = a^3 - \square + \square - 125$
d. $(3+t)^3 = \square + 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + \square = \square + 27t + \square + t^3$
e. $(x-2)^3 = x^3 \square 3 \times \square \times \square + 3 \times \square \times \square + (-2)^3 = x^3 \square \square + 12x - \square$

2. ප්‍රසාරණය කරන්න.

a. $(m+2)^3$	**b.** $(x+4)^3$	**c.** $(b-2)^3$	**d.** $(t-10)^3$
e. $(5+p)^3$	**f.** $(6+k)^3$	**g.** $(1+b)^3$	**h.** $(4-x)^3$
i. $(2-p)^3$	**j.** $(9-t)^3$	**k.** $(-m+3)^3$	**l.** $(-5-y)^3$
m. $(ab+c)^3$	**n.** $(2x+3y)^3$	**o.** $(3x+4y)^3$	**p.** $(2a-5b)^3$

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් වීජීය ප්‍රකාශනය ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

a. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	**b.** $c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3$
c. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	**d.** $y^3 - 18y^2 + 108y - 216$
e. $1 + 3x + 3x^2 + x^3$	**f.** $64 - 48x + 12x^2 - x^3$



4. රූපයේ දැක්වෙන්නේ පැත්තක දිග ඒකක $(a + 5)$ බැගින් වූ ඝනකයකි. එහි පරිමාව සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා, එම ප්‍රකාශනය ප්‍රසාරණය කර දක්වන්න.

5. $(x + 3)^3$ යන්න ප්‍රසාරණය කර,

(i) $x = 2$
(ii) $x = 4$

අවස්ථා සඳහා පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.

6. ඝනායිත පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්, දී ඇති සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

(i) $64 - 3 \times 16 \times 3 + 3 \times 4 \times 9 - 27$
(ii) $216 - 3 \times 36 \times 5 + 3 \times 6 \times 25 - 125$

7. පහත දැක්වෙන එක එකක අගය, ද්විපද ප්‍රකාශනයක ඝනායිතයක් ලෙස ලියා සොයන්න.

a. 21^3 **b.** 102^3 **c.** 17^3 **d.** 98^3

8. පැත්තක දිග $2a - 5$ cm වූ ඝනකයක පරිමාව a ඇසුරෙන් සොයන්න.

9. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ යන්න ඝනායිතයක් ලෙස ලියා දක්වා එනයින්
$25^3 - 3\times 25^2\times 23 + 3 \times 25 \times 23^2 - 23^3$ හි අගය සොයන්න.

7 වීජීය භාග

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

වීජීය භාග ගුණ කිරීම සහ බෙදීම පිළිබඳ ව අවබෝධයක් ලැබෙනු ඇත.

වීජීය භාග එකතු කිරීම සහ අඩු කිරීම පිළිබඳව ඔබ මීට පෙර උගත් කරුණු පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

සුළු කරන්න.

a. $\frac{a}{5} + \frac{2a}{5}$ **b.** $\frac{8}{x} - \frac{3}{x}$ **c.** $\frac{7}{3m} + \frac{3}{4m} - \frac{8}{m}$

d. $\frac{9}{x+2} + \frac{1}{x}$ **e.** $\frac{1}{m+2} - \frac{2}{m+3}$ **f.** $\frac{a+3}{a^2-4} + \frac{1}{a+2}$

g. $\frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$ **h.** $\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30}$

7.1 වීජීය භාග ගුණ කිරීම

භාග සංඛ්‍යාවක් තවත් භාග සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කරන ආකාරයට ම වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් ගුණ කිරීම සිදු කළ හැකි ය. මෙය නිදසුන් ඇසුරෙන් අවබෝධ කර ගනිමු.

$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3}$ යන ගුණ කිරීම සලකමු.

භාග දෙකක් ගුණ කිරීම යන්නෙන් අදහස් වන්නේ එම ගුණිත තනි වීජීය භාගයක් ලෙස දැක්වීම යි.

භාග දෙකෙහි හරයේ ඇති පද හා ලවයේ ඇති පද වෙන වෙන ම ගුණ කොට, තනි භාගයක් ලබා ගැනේ. එනම්,

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x \times x}{2 \times 3}$$

$$= \frac{x^2}{6}$$ ලෙස ගුණ කරනු ලැබේ.

හරයේ හා ලවයේ ඇති පද තව දුරටත් සුළු කළ හැකි නම්, ඒවා සුළු කර සරලම ආකාරයෙන් තැබිය හැකි ය. මෙසේ සුළු කිරීම භාග ගුණ කිරීමට පෙර හෝ ඊට පසු හෝ කළ හැකි ය. එවැනි සුළු කිරීමක් සහිත ගැටලුවක් විසඳන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

$\dfrac{8}{a} \times \dfrac{3}{2b}$ ගුණ කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

මෙහි මුලින් භාගයේ ලවයේ ඇති 8ට සහ දෙවනුව ඇති භාගයේ හරයේ ඇති $2b$ට පොදු වූ සාධකය වන 2 ඉවත් කළ හැකි ය. එය මෙසේ සුළු කරමු.

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{a} \times \frac{3}{{}_{1}\cancel{2}b}$$

දැන් භාග දෙකෙහි ලවයේ හා හරයේ ඇති අගයන් වෙන වෙන ම ගුණ කරමු. එවිට,

$$\frac{8}{a} \times \frac{3}{2b} = \frac{4 \times 3}{a \times b}$$

$$= \underline{\underline{\frac{12}{ab}}}$$

ලෙස සුළු වී තනි භාගයක් ලැබේ.

භාග ගුණ කිරීමෙන් පසු ද පොදු සාධක ඉවත් කළ හැකි ය. පහත දැක්වෙන නිදසුන විමසා බලන්න.

$$\frac{3}{2a} \times \frac{2b}{3} = \frac{6b}{6a}$$

$$= \frac{b}{a}$$

ලෙස ගුණ කළ හැකි ය. එසේ නමුත්, වීජීය භාග සුළු කිරීමේ දී මුලින් පොදු සාධක ඉවත් කිරීම තුළින් බොහෝ විට දීර්ඝ ලෙස ගුණ කිරීම් හා බෙදීම් නොයෙදෙන නිසා එසේ කිරීම බොහෝ විට යෝග්‍ය විය හැකි ය.

පහත දැක්වෙන වීජීය භාග සුළු කර ඇති අයුරු විමසා බලන්න.

නිදසුන 1

$$\frac{x}{y} \times \frac{4}{5x}$$

$$= \frac{{}^{1}\cancel{x}}{y} \times \frac{4}{5\cancel{x}_{1}}$$ (පොදු සාධකයක් වන x වලින් බෙදීම)

$$= \frac{1 \times 4}{y \times 5}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{5y}}}$$

ලවයේ හෝ හරයේ හෝ ඒ දෙකේ ම හෝ වීජීය ප්‍රකාශන සහිත වීජීය භාග ගුණ කිරීමේ දී මුලින් ම සාධක වෙන් කර ගත යුතු ය. ඒ, පොදු සාධක ඇත් නම් ඒවා ඉවත් කිරීම සඳහා ය. දැන් එවැනි නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 2

$\dfrac{2}{x+3} \times \dfrac{x^2+3x}{5}$ සුළු කරන්න.

$$\frac{2}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{5} = \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5} \quad (x^2+3x \text{ හි සාධක වෙන් කිරීම})$$

$$= \frac{2}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{5} \quad (x+3 \text{ යන පොදු සාධකයෙන් බෙදීම})$$

$$= \frac{2x}{5}$$

දැන් මඳක් සංකීර්ණ ගැටලුවක් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

$a^2-9 = (a-3)(a+3)$ නිසා

$a^2+a-6 = (a+3)(a-2)$ නිසා

$\dfrac{a^2-9}{5a} \times \dfrac{2a-4}{a^2+a-6}$ සුළු කරන්න.

$$\frac{a^2-9}{5a} \times \frac{2a-4}{a^2+a-6} = \frac{a^2-3^2}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{(a-3)(a+3)}{5a} \times \frac{2(a-2)}{(a+3)(a-2)}$$

$$= \frac{2(a-3)}{5a}$$

7.1 අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන වීජීය භාග සුළු කරන්න.

a. $\dfrac{6}{x} \times \dfrac{2}{3x}$

b. $\dfrac{x}{5} \times \dfrac{3}{xy}$

c. $\dfrac{2a}{15} \times \dfrac{5}{9}$

d. $\dfrac{4m}{5n} \times \dfrac{3}{2m}$

e. $\dfrac{x+1}{8} \times \dfrac{2x}{x+1}$

f. $\dfrac{3a-6}{3a} \times \dfrac{1}{a-2}$

g. $\dfrac{x^2}{2y+5} \times \dfrac{4y+10}{3x}$

h. $\dfrac{m^2-4}{m+1} \times \dfrac{m^2+2m+1}{m+2}$

i. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1} \times \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

j. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} \times \dfrac{2a-2b}{a^2+ab}$

7.2 වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් බෙදීම

භාගයක් තවත් භාගයකින් බෙදීමේ දී මුල් භාගය දෙවන භාගයේ පරස්පරයෙන් ගුණ කර පිළිතුර ලබා ගත් ආකාරය ඔබට මතක ඇතුවාට සැක නැත. එලෙසින්ම වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් බෙදීමේ දී ද පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම සිදු කළ හැකි ය.

වීජීය භාග බෙදීම පිළිබඳව අධ්‍යයනය කිරීමට පෙර වීජීය භාගයක පරස්පරය පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

වීජීය භාගයක පරස්පරය

සංඛ්‍යාවක් තවත් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කළ විට, ගුණිතය 1 වේ නම්, එම එක් සංඛ්‍යාවක්, අනෙක් සංඛ්‍යාවේ පරස්පරය හෙවත් ගුණ්‍ය ප්‍රතිලෝමය බව මීට පෙර උගෙන ඇත. ඒ අනුව,

සංඛ්‍යාවක පරස්පරය පිළිබඳ ව අප උගත් කරුණු මතකයට නගා ගනිමු.

$2 \times \frac{1}{2} = 1$ බැවින් 2හි පරස්පරය $\frac{1}{2}$ ද, $\frac{1}{2}$හි පරස්පරය 2 ද

$\frac{1}{3} \times 3 = 1$බැවින් $\frac{1}{3}$හි පරස්පරය 3 ද, 3හි පරස්පරය $\frac{1}{3}$ ද

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$ බැවින් $\frac{4}{5}$හි පරස්පරය $\frac{5}{4}$ ද, $\frac{5}{4}$හි පරස්පරය $\frac{4}{5}$ ද වේ.

වීජීය භාගයක පරස්පරය ද ඉහත ලෙස ම විස්තර කෙරේ. එනම්,
වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් ගුණ කළ විට ගුණිතය 1 වේ නම්, එම එක් වීජීය භාගයක්, අනෙක් වීජීය භාගයේ පරස්පරය වේ.

$\frac{5}{x}$ හා $\frac{x}{5}$ වීජීය භාග ගුණ කරමු.

$\frac{5}{x} \times \frac{x}{5} = \frac{1}{1} = 1$

එබැවින් $\frac{5}{x}$ හි පරස්පරය $\frac{x}{5}$ ද, $\frac{x}{5}$හි පරස්පරය $\frac{5}{x}$ ද වේ.

මෙලෙසින් ම

$\frac{x+1}{y} \times \frac{y}{x+1} = 1$ බැවින්

$\frac{x+1}{y}$ හි පරස්පරය $\frac{y}{x+1}$ ද, $\frac{y}{x+1}$ හි පරස්පරය $\frac{x+1}{y}$ ද වේ.

මින් පැහැදිලි වන්නේ සංඛ්‍යාවක පරස්පරය සෙවීමේ දී, එහි ලවය හා හරය හුවමාරු කර ලිවීමෙන් පරස්පරය ලබා ගන්නා ආකාරයට ම වීජීය භාගයක ද ලවය හා හරය හුවමාරු කර ලිවීමෙන් එම වීජීය භාගයේ පරස්පරය ලබා ගත හැකි බව යි.
පහත දී ඇති වීජීය භාග සහ ඒවායේ පරස්පර නිරීක්ෂණය කරන්න.

වීජීය භාගය	පරස්පරය
$\frac{m}{4}$	$\frac{4}{m}$
$\frac{a}{a+2}$	$\frac{a+2}{a}$
$\frac{x-3}{x^2+5x+6}$	$\frac{x^2+5x+6}{x-3}$

දැන් අපි වීජීය භාගයක් තවත් වීජීය භාගයකින් බෙදන ආකාරය අධ්‍යයනය කරමු.

නිදසුන 1

$\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x}$ සුළු කරන්න.

$\frac{3}{x} \div \frac{4y}{x} = \frac{3}{x} \times \frac{x}{4y}$ ($\frac{4y}{x}$ ගෙන් බෙදීම වෙනුවට එහි පරස්පරය වන $\frac{x}{4y}$ ගෙන් ගුණ කිරීම)

$= \frac{3}{x} \times \frac{x}{4y}$ (පොදු සාධකයක් වන x ගෙන් බෙදීම)

$= \frac{3}{4y}$ (ලව වෙන ම ද, හර වෙන ම ද ගුණ කිරීම)

තවත් නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

$\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4}$ සුළු කරන්න.

$\frac{a}{b} \div \frac{ab}{4} = \frac{a}{b} \times \frac{4}{ab}$ (පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම)

$= \frac{{}^{1}\not{a}}{b} \times \frac{4}{\not{a}_{1}b}$ (පොදු සාධකයක් වන a ගෙන් බෙදීම)

$= \frac{4}{b^2}$

හරයේ හෝ ලවයේ හෝ වීජීය ප්‍රකාශන ඇති විට මුලින් ම එම ප්‍රකාශන, සාධකවලට වෙන් කර ගෙන, ඉන් පසු පොදු සාධක ඉවත් කර සුළු කළ හැකි ය.

මෙය නිදසුන් මගින් පැහැදිලි කර ගනිමු.

නිදසුන 3

$\dfrac{3x}{x^2+2x} \div \dfrac{5x}{x^2-4}$ සුළු කරන්න.

$$\frac{3x}{x^2+2x} \div \frac{5x}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2+2x} \times \frac{x^2-4}{5x}$$ (පරස්පරයෙන් ගුණ කිරීම)

$$= \frac{3x}{x(x+2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{5x}$$ (ප්‍රකාශන සාධකවලට වෙන් කිරීම හා පොදු සාධකවලින් බෙදීම)

$$= \frac{3(x-2)}{5x}$$

නිදසුන 4

$\dfrac{x^2+3x-10}{x} \div \dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2+3x-10}{x} \div \frac{x^2-25}{x^2-5x} = \frac{x^2+3x-10}{x} \times \frac{x^2-5x}{x^2-25}$$

$$= \frac{(x+5)(x-2)}{x} \times \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{x-2}{1}$$

$$= x-2$$

7.2 අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන වීජීය භාග සුළු කරන්න.

a. $\dfrac{5}{x} \div \dfrac{10}{x}$

b. $\dfrac{m}{3n} \div \dfrac{m}{2n^2}$

c. $\dfrac{x+1}{y} \div \dfrac{2(x+1)}{x}$

d. $\dfrac{2a-4}{2a} \div \dfrac{a-2}{3}$

e. $\dfrac{x^2+4x}{3y} \div \dfrac{x^2-16}{12y^2}$

f. $\dfrac{p^2+pq}{p^2-pr} \div \dfrac{p^2-q^2}{p^2-r^2}$

g. $\dfrac{m^2-4}{m+1} \div \dfrac{m+2}{m^2+2m+1}$

h. $\dfrac{x^2y^2+3xy}{4x^2-1} \div \dfrac{xy+3}{2x+1}$

i. $\dfrac{a^2-5a}{a^2-4a-5} \div \dfrac{a^2-a-2}{a^2+2a+1}$

j. $\dfrac{x^2-8x}{x^2-4x-5} \times \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-8x^2} \div \dfrac{x^2+2x-3}{x-5}$

8 සමාන්තර රේඛා අතර තල රූපවල වර්ගඵලය

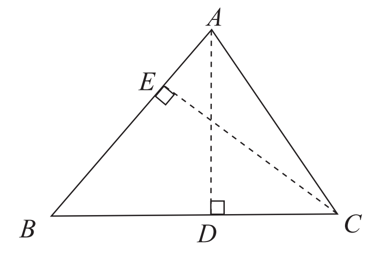
මෙම පාඩම අධ්‍යයනයෙන් ඔබට,

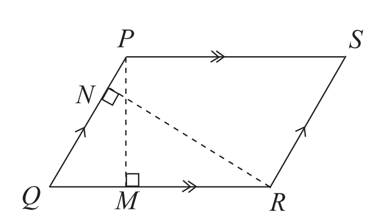
- එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිතව පිහිටි ත්‍රිකෝණවලත් සමාන්තරාස්‍රවලත් වර්ගඵල අතර පවතින සම්බන්ධතා පිළිබඳ ප්‍රමේයයන් හඳුනා ගැනීමටත්, ඒ හා සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමටත්

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

හැඳින්වීම

විවිධ තලරූප පිළිබඳවත්, සමහර විශේෂ ආකාරයේ තලරූපවල වර්ගඵල සොයන ආකාරය පිළිබඳවත් මේ වන විට ඔබ උගෙන ඇත. ඒවා අතුරින් ත්‍රිකෝණවල හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලය ලබා ගත් ආකාරය මතක් කර ගනිමු.
ත්‍රිකෝණ හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල සෙවීමේ දී **උච්චය** හා **ආධාරකය** යන පද භාවිත වේ. එම පදවලින් හැඳින්වෙන්නේ මොනවා දැයි මුලින් ම මතක් කර ගනිමු.
පහත දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය හා $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය සලකමු.





ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සෙවීමේ දී කැමති පාදයක් ආධාරකය ලෙස සැලකිය හැකි ය. නිදසුනක් ලෙස BC පාදය ආධාරකය ලෙස ගත හැකි ය. එවිට අනුරූප උච්චය ලෙස සැලකෙන්නේ AD රේඛාව යි. එනම්, A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය යි.

මෙවිට

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} \times BC \times AD$ බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු.
මෙපරිද්දෙන් ම,
AB පාදය ආධාරකය ලෙස සැලකුව හොත්, අනුරූප උච්චය වන්නේ CE රේඛාව යි.

ඒ අනුව, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} \times AB \times CE$ ද ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

මෙලෙස ම, AC පාදය ආධාරකය ලෙස සලකා, B සිට අනුරූප උච්චය ඇඳීමෙන් ද ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සෙවිය හැකි ය.

දැන් $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය සලකමු. මෙහි දී ද ඕනෑ ම පාදයක් ආධාරකය ලෙස ගෙන වර්ගඵලය සෙවිය හැකි ය. මෙහි QR පාදය ආධාරකය ලෙස සැලකුවහොත්, අනුරූප උච්චය වන්නේ PM රේඛාව යි. PMහි දිග වන්නේ QR හා ඊට සම්මුඛ පාදය වන PS සමාන්තර රේඛා අතර දුරයි.

එවිට,
$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= QR \times PM$ බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු.

එසේ ම, PQ පාදය ආධාරක පාදය ලෙස සැලකුව හොත් අනුරූප උච්චය වන්නේ RN ය.

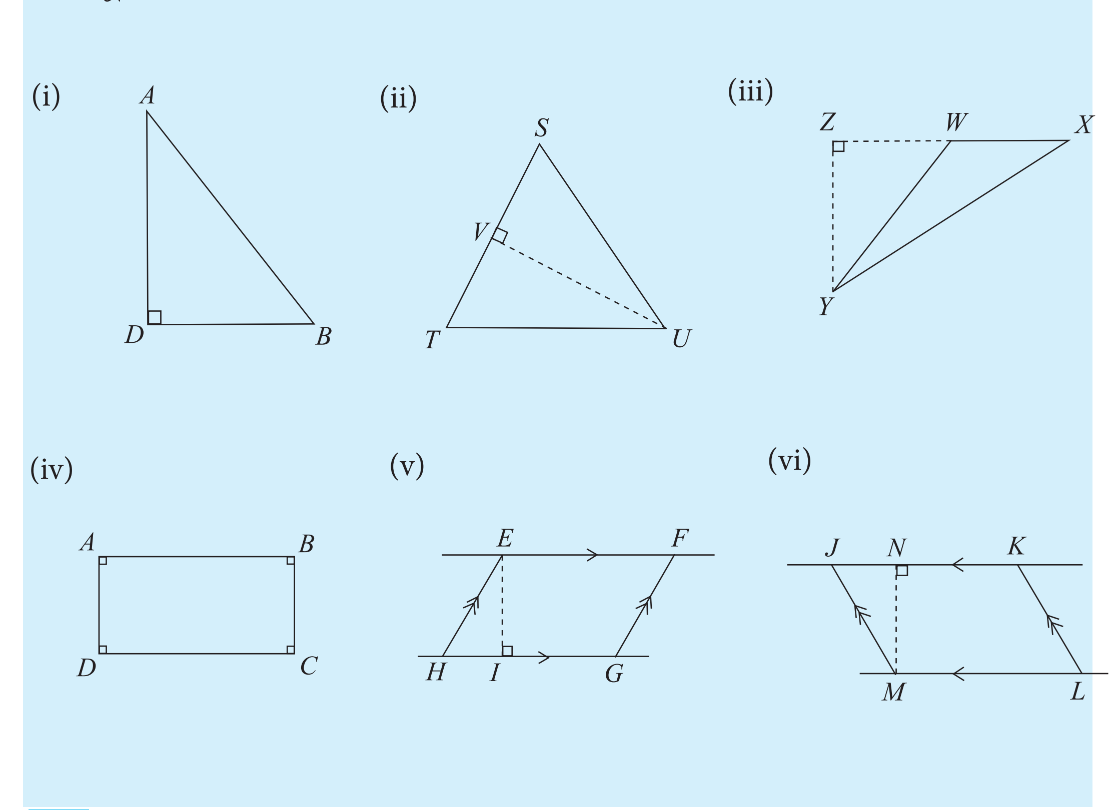
එවිට $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= PQ \times RN$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

සටහන: ත්‍රිකෝණයක හෝ සමාන්තරාස්‍රයක උච්චයෙහි දිග ද බොහෝ විට උච්චය යන නමින් ම හැඳින්වේ.

මෙම කරුණු අදාළ කර ගනිමින් මීට පෙර ත්‍රිකෝණවල හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලය සෙවීම පිළිබඳ ව උගත් කරුණු මතකයට නගා ගැනීම පිණිස පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

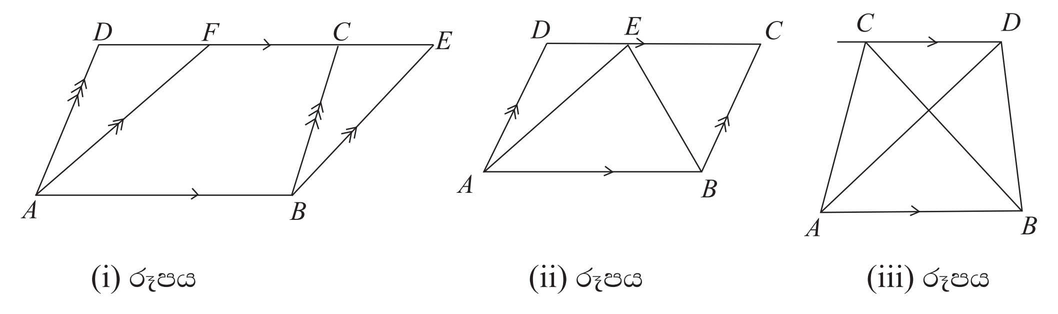
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් පසු පිටේ දක්වා ඇති වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.



රූපය	ආධාරක පාදය	අනුරූප ලම්බ උස	වර්ගඵලය (පාදවල දිගෙහි ගුණිතයක් ලෙස)
(i) ABD ත්‍රිකෝණය (ii) STU ත්‍රිකෝණය (iii) WXY ත්‍රිකෝණය (iv) $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රය (v) $EFGH$ සමාන්තරාස්‍රය (vi) $JKLM$ සමාන්තරාස්‍රය			

8.1 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණ

එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එකම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණ යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් ද යන්න මුලින් ම විමසා බලමු. පහත දී ඇති රූපසටහන්වලට අවධානය යොමු කරන්න.



(i) රූපය (ii) රූපය (iii) රූපය

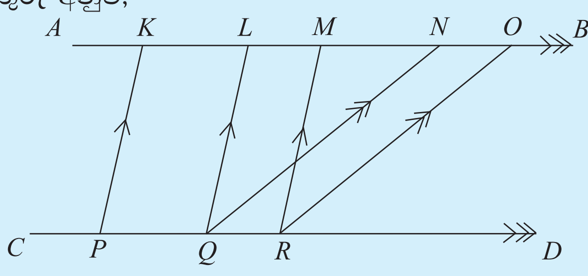
(i) රූපයෙහි දැක්වෙන $ABCD$ හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍ර දෙක ම පිහිටා ඇත්තේ AB හා DE නම් රේඛා යුගලය අතර ය. මෙහි දී "අතර" යන්නෙන් අදහස් වන්නේ, එක් එක් සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද දෙකක්, AB හා DE සමාන්තර රේඛා දෙක මත පිහිටන බව යි. තව ද, එම සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම AB පාදය පොදු වේ. මෙවැනි පිහිටීමක දී එම සමාන්තරාස්‍ර දෙක, එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිත ව ඇතැයි කියනු ලැබේ. මෙහි දී AB පොදු පාදය, සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි ම ආධාරකය ලෙස සලකා ඇත. එම පොදු ආධාරකයට අනුරූපව සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම එක ම ලම්බ දුර ඇති බව පැහැදිලි ය. එම ලම්බ දුර වන්නේ AB හා DE සමාන්තර රේඛා දෙක අතර දුර යි.

(ii) රූපයේ දැක්වෙන්නේ, සමාන්තරාස්‍රයක් හා ත්‍රිකෝණයක්, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටා ඇති ආකාරය යි. සමාන්තරාස්‍රය $ABCD$ ද, ත්‍රිකෝණය ABE ද වේ. පොදු ආධාරකය AB ය. මෙහි දී ත්‍රිකෝණයේ එක් පාදයක් හා ඊට සම්මුඛ ශීර්ෂය සමාන්තර රේඛා එක එකක් මත පිහිටන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

(iii) රූපයේ, දැක්වෙන්නේ එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටි ත්‍රිකෝණ දෙකක් ය. එම ත්‍රිකෝණ දෙක ABC හා ABD ය.

8.1 අභ්‍යාසය

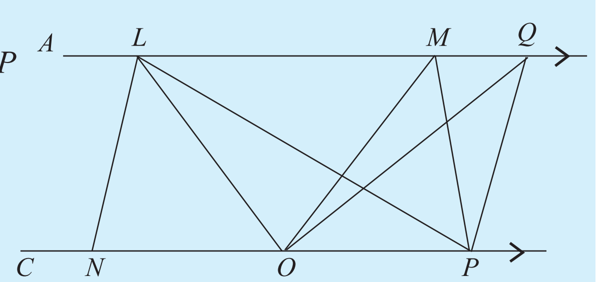
1. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,



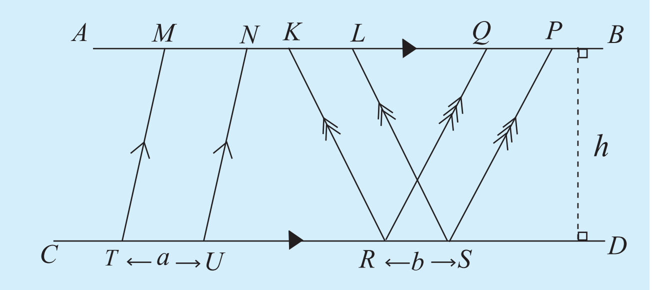
(i) සමාන්තරාස්‍ර හතරක් නම් කරන්න.

(ii) AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි ආධාරක පාදය QR වූ සමාන්තරාස්‍ර දෙක නම් කරන්න.

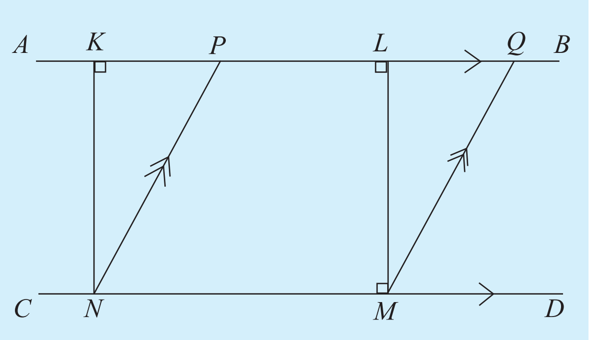
2. රූපයේ දැක්වෙන AQ හා CP සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි එකම OP ආධාරකය සහිත ත්‍රිකෝණ සියල්ල ලියා දක්වන්න.



3. රූපයේ දී ඇති AB හා CD සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර ලම්බ දුර h මගින් ද එක් එක් සමාන්තරාස්‍රයේ ආධාරක පාදයේ දිග a හා b මගින් ද දැක්වේ. එම සංකේත ඇසුරෙන් $PQRS$, $KLSR$ හා $MNUT$ සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල ලියා දක්වන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන AB හා CD සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රය හා $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රය පිහිටා ඇත. $NM = 10$ cm හා $LM = 8$ cm වේ.



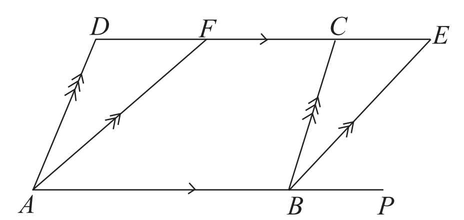
(i) $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(iii) $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය හා $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය අතර ඇති සම්බන්ධතාව කුමක් ද?

8.2 එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල

මීළඟට අප සලකා බලන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එකම ආධාරකය සහිතව පවතින සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල අතර සම්බන්ධය යි. පහත රූපයේ දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍ර දෙක සලකන්න.



මෙහි දැක්වෙන $ABCD$ හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි වර්ගඵල සමාන වේ දැයි විමසා බලමු. ඒ සඳහා මුලින් ම,

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCF$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $+$ AFD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බවත්

$ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCF$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $+$ BEC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බවත්

නිරීක්ෂණය කරන්න.

එමනිසා,

AFD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ BEC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

වුව හොත් සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි වර්ගඵල සමාන විය යුතු බව ඔබට පෙනෙනවා ඇත. ඇත්තවශයෙන් ම මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ. එමනිසා ඒවායේ වර්ගඵල ද සමාන වේ. මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම බව පා.කෝ.පා අවස්ථාව සලකා මෙසේ පෙන්විය හැකි ය.

AFD හා BEC ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$AD = BC$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද)

$AF = BE$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද)

තව ද, $D\hat{A}B = C\hat{B}P$ (අනුරූප කෝණ) හා $F\hat{A}B = E\hat{B}P$ (අනුරූප කෝණ) නිසා, මෙම සමීකරණ දෙක අඩු කිරීමෙන්, $D\hat{A}B - F\hat{A}B = C\hat{B}P - E\hat{B}P$

$D\hat{A}F = C\hat{B}E$ ලෙස ලැබේ.

මේ අනුව. පා.කෝ.පා අවස්ථාව යටතේ, AFD හා BEC ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ.

මේ අනුව, ඉහත සාකච්ඡා කළ පරිදි,

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ලෙස ලැබේ. මෙම ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ලියා දක්වමු.

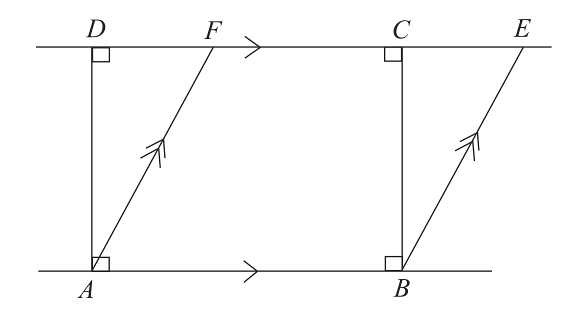
ප්‍රමේයය: එකම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ලබා ගනිමු. සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා පහත දැක්වෙන සූත්‍රය ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී මෙන් ම ඉහත අභ්‍යාසයේ දී ද භාවිත කළේ ය.

සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය = ආධාරකය $\times$ ලම්බ උස

මෙම ප්‍රතිඵලය ලැබුණේ කෙසේ දැයි ඔබ මීට කලින් සිතා තිබුණා ද? දැන් අපට ඉහත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් මෙම සූත්‍රය සාධනය කොට පෙන්විය හැකි ය.

පහත දැක්වෙන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා දෙකක් අතර හා එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රය (එනම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි) හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රය යි.

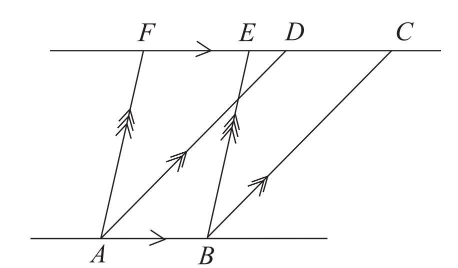


ඉහත ප්‍රමේයය අනුව ඒවායේ වර්ගඵල සමාන වේ.
නමුත්, සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය = දිග $\times$ පළල බව අපි දනිමු.
ඒ අනුව,
$ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය
= $AB \times AD$
= $AB \times$ සමාන්තර රේඛා දෙක අතර ලම්බ දුර
= සමාන්තරාස්‍රයේ ආධාරකය $\times$ ලම්බ දුර

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන අයුරු දැන් බලමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 80cm^2 ද $AB = 8$ cm ද වේ.



(i) රූපයේ එක ම ආධාරකය මත එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටන සමාන්තරාස්‍ර නම් කරන්න.

(ii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය කොපමණ ද?

(iii) AB හා FC සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස සොයන්න.

දැන් මෙම කොටස්වලට පිළිතුරු සපයමු.

(i) $ABEF$ හා $ABCD$

(ii) $ABEF$ හා $ABCD$ එක ම ආධාරකය වන AB මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය වන AB හා FC අතර පිහිටන බැවින්, $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ හා $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමාන වේ.

$\therefore$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 80cm^2 වේ.

(iii) සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස සෙන්ටිමීටර h යැයි ගනිමු.

එවිට $ABEF$ වර්ගඵලය $= AB \times h$

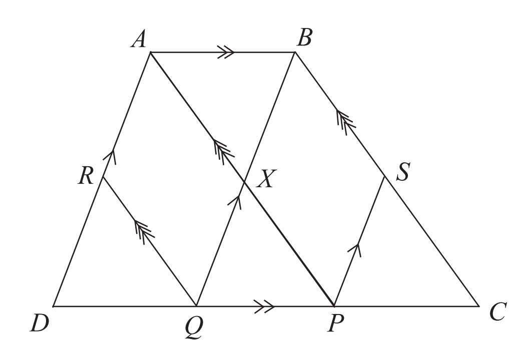
$$80 = 8 \times h$$

$$h = 10$$

$\therefore$ සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස 10 cm වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරුවලට අනුව,

(i) $ABQD$ හා $ABCP$ සමාන්තරාස්‍ර බව පෙන්වන්න.

(ii) $ABQD$ හා $ABCP$ වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර වන බව පෙන්වන්න.

(iii) $SPC\Delta \equiv DQR\Delta$ බව සාධනය කරන්න.

(iv) $AXQR$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $BXPS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.

(i) $ABQD$ චතුරස්‍රයේ,

$AB//DQ$ (දී ඇත)

$AD//BQ$ (දී ඇත)

සම්මුඛ පාද සමාන්තර වන චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වන නිසා $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. එලෙස ම $AB//PC$ හා $AP//BC$ වන නිසා $ABCP$ ද සමාන්තරාස්‍රයකි.

(ii) $ABQD$ හා $ABCP$ සමාන්තරාස්‍ර දෙක,

එක ම ආධාරකය වන AB මත හා, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය වන AB හා DC අතර පිහිටා තිබෙන බැවින්, ඉහත ප්‍රමේයයට අනුව ඒවා වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

$\therefore$ $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

(iii) රූපයේ, SPC හා RDQ ත්‍රිකෝණවල

$S\hat{P}C = R\hat{D}Q$ ($SP//AD$, අනුරූප කෝණ)

$S\hat{C}P = R\hat{Q}D$ ($SC//RQ$, අනුරූප කෝණ)

තව ද, $AB = PC$ ($ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$AB = DQ$ ($ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$\therefore PC = DQ$

$\therefore$ $SPC\Delta \equiv DQR\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

(iv) $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය (සාධිත යි)

$RDQ\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $SPC\Delta$ වර්ගඵලය ($RDQ\Delta \equiv SPC\Delta$ නිසා)

එමනිසා , $ABQD$ වර්ගඵලය $-$ $RDQ\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ වර්ගඵලය $-$ $SPC\Delta$ වර්ගඵලය

එනම් රූපය අනුව $ABQR$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $=$ $ABSP$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය

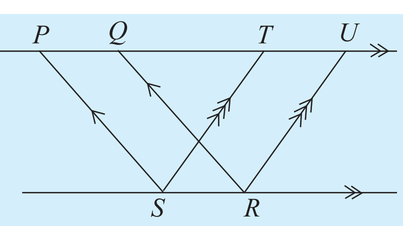
දෙපසින්ම ABX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය අඩු කළ විට

$ABQR$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $-$ $ABX\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $ABSP$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $-$ $ABX\Delta$ වර්ගඵලය

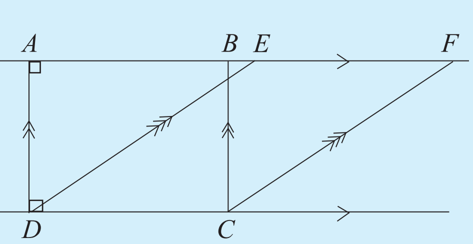
$\therefore$ $AXQR$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $BXPS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

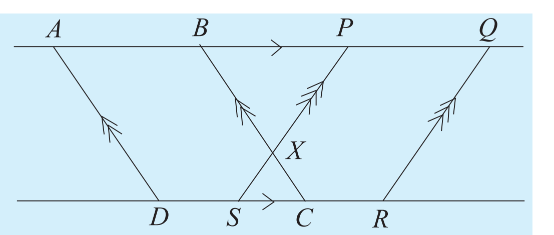
8.2 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන්නේ PU හා SR සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 40 cm^2 වේ. $TURS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය හේතු සහිතව ලියා දක්වන්න.



2. දී ඇති රූපයේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් හා $CDEF$ සමාන්තරාස්‍රයක් දැක්වේ. $AD = 7$ cm හා $CD = 9$ cm නම්, $CDEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය හේතු සහිතව ලියා දක්වන්න.



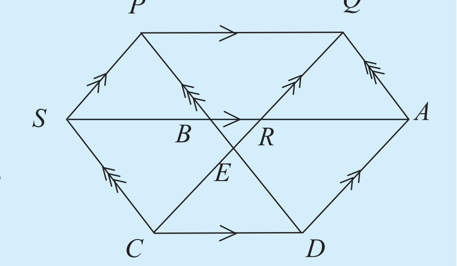


3. රූපයේ දැක්වෙන්නේ AQ හා DR සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටි $ABCD$ හා $PQRS$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. $DS = CR$ බව දී ඇත.

(i) $DC = SR$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $ABXSD$ පංචාස්‍රයේ වර්ගඵලය, $PQRCX$ පංචාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වන බව සාධනය කරන්න.

(iii) $APSD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, $BQRC$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

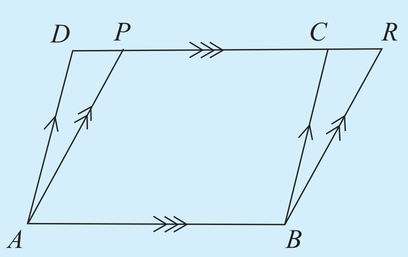


4. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,

(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න.

(ii) $ADCR$ සමාන්තරාස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න.

(iii) $PECS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයට, $QADE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමාන බව සාධනය කරන්න.



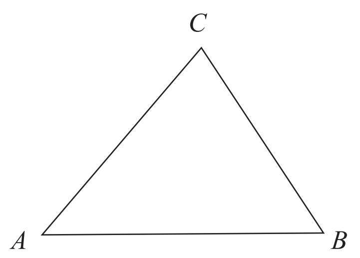
5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව ADP ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය BRC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

6. $AB = 6$ cm, $D\hat{A}B = 60^0$ හා $AD = 5$ cm වූ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරන්න. AB රේඛාවෙන්, සමාන්තරාස්‍රය පිහිටි පැත්තේ ම පිහිටන පරිදි හා එහි වර්ගඵලයට සමාන වන සේ $ABEF$ රොම්බසය නිර්මාණය කරන්න. ඔබේ නිර්මාණයට ඔබ යොදා ගත් ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයය සඳහන් කරන්න.

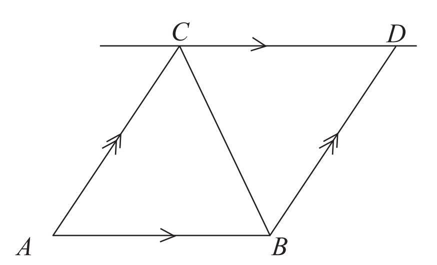
8.3 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල

ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා පහත දැක්වෙන සූත්‍රය ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල සිට ම භාවිත කරමින් ඇත. ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}$ × ආධාරකය × ලම්බ උස

දැන් අප සූදානම් වන්නේ මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ ඇයි ද යන්න පැහැදිලි කිරීමට යි. පහත දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය සලකමු.



මීළඟ රූපයේ දැක්වෙන අයුරින්, C හරහා, ABට සමාන්තර රේඛාවක් ඇඳ, $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි එම සමාන්තර රේඛාව මත D ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරමු. වෙනත් අයුරකින් පැවසුවහොත්, AB ට සමාන්තරව C හරහා ඇඳි රේඛාවෙන්, AC ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාව ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය D ලෙස නම් කරමු.



දැන්, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකි. එයට හේතුව, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණයකින් එම සමාන්තරාස්‍රය අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකකට වෙන් වන නිසා ය. ඒ බව අපි 10 වසරේ සමාන්තරාස්‍ර පාඩම යටතේ උගත්තෙමු. එමනිසා,

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}$ $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$= \dfrac{1}{2} \times AB \times$ (AB හා CD රේඛා අතර ලම්බ දුර)

$= \dfrac{1}{2} \times AB$ ආධාරකය $\times$ ලම්බ දුර

එනම්, ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සඳහා අපට හුරුපුරුදු සූත්‍රය ලැබී ඇත.

මෙහි දී අප නිරීක්ෂණය කළ

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} \times ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

යන ප්‍රතිඵලය නැවත සලකන්න. මෙම පාඩමේ 8.2 කොටසේදී අප ඉගෙන ගත්තේ එක ම සමාන්තර රේඛා දෙකක් අතර එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටි සමාන්තරාස්‍රවල

වර්ගඵල සමාන බව යි. එමනිසා, ඉහත රූපයට අදාළව, AB හා CD සමාන්තර රේඛා අතර, AB ආධාරකය සහිතව ඇති වෙනත් ඕනෑ ම සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය ද $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ. එනම්,

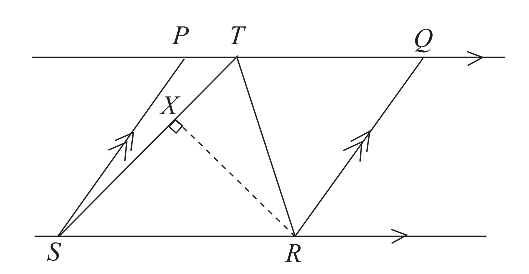
ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ (AB හා CD සමාන්තර රේඛා අතර, AB ආධාරකය සහිතව පිහිටි ඕනෑ ම සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය)

මෙම ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය: ත්‍රිකෝණයක් හා සමාන්තරාස්‍රයක්, එක ම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටා ඇති නම්, එම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, එම සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩක් වේ.

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර හා එක ම ආධාරකයක් මත පිහිටි $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් හා STR ත්‍රිකෝණයකි. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 60 cm^2 වේ.

(i) හේතු දක්වමින් STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(ii) $ST = 6$ cm නම්, R සිට ST ට ඇඳි ලම්බයේ දිග සොයන්න.

(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය හා STR ත්‍රිකෝණය එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලක් අතර පිහිටන අතර, එක ම ආධාරකය මත පිහිටයි. එමනිසා STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකි.

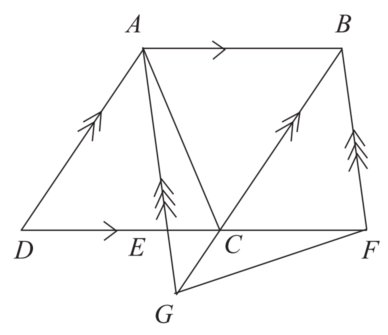
$\therefore$ STR Δ වර්ගඵලය $= 30 \text{ cm}^2$

(ii) STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times ST \times RX$

$$\therefore \; 30 = \frac{1}{2} \times 6 \times RX$$

$$\therefore \; RX = \underline{\underline{10 \text{ cm}}}$$

නිදසුන 2



E යනු $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ DC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AE ට සමාන්තර ව B සිට අඳින ලද රේඛාවට, දික් කළ DC පාදය F හි දී හමු වේ. දික් කළ AE හා දික් කළ BC රේඛා G හිදී හමු වේ.

(i) $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(ii) $ABCD$ හා $ABFE$ සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව
(iii) ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බව

සාධනය කරන්න.

(i) $ABFE$ චතුරස්‍රයේ,
$AE//BF$ (දී ඇත)
$AB//EF$ (දී ඇත)
$\therefore$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයකි. (සම්මුඛ පාද සමාන්තර නිසා)

(ii) $ABCD$ හා $ABFE$ සමාන්තරාස්‍ර දෙක,
AB හා DF එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර හා AB එක ම ආධාරකය ඇතිව පිහිටා තිබේ.
$\therefore$ ප්‍රමේයය අනුව $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

(iii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රය හා ACD ත්‍රිකෝණය, DC හා AB සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර හා DC එක ම ආධාරකය මත පිහිටා තිබේ.
$\therefore$ ප්‍රමේයය අනුව, $\frac{1}{2}$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

එසේම, $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රය හා BFG ත්‍රිකෝණය BF හා AG සමාන්තර රේඛා යුගල අතර හා එක ම ආධාරකය BF මත පිහිටා තිබේ.

එවිට, $\frac{1}{2}$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

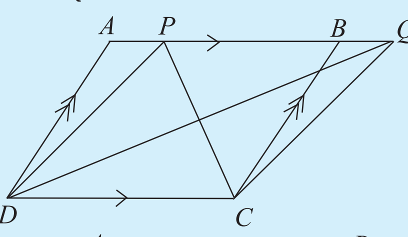
නමුත්, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය නිසා

එවිට, $\frac{1}{2}$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $\frac{1}{2}$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$\therefore$ ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

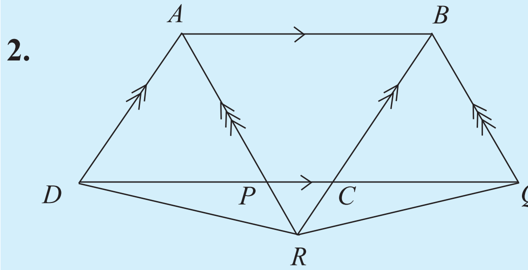
8.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 50 cm^2 වේ.



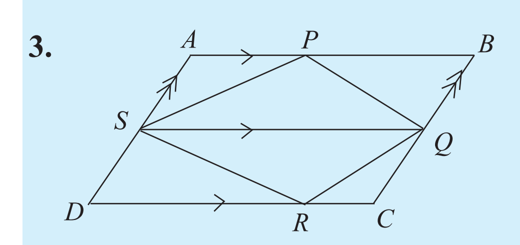
(i) PDC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?
(ii) DCQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

2.



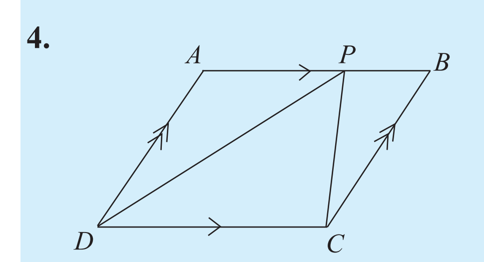
$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, DC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. AP ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ DC පාදයට Q හිදී හමු වේ. දික් කළ AP හා දික් කළ BC රේඛා R හි දී හමු වේ. ADR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය BQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

3.



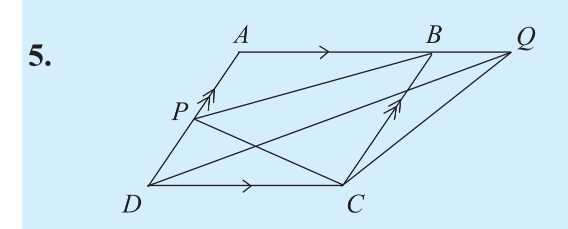
රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, AD පාදය Sහි දී ද, BC පාදය Qහි දී ද හමු වන සේ, AB ට සමාන්තරව SQ ඇඳ තිබේ. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.

4.

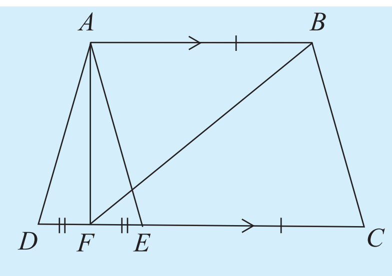


P යනු රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AB පාදය මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි.
$APD\Delta$ ව.ඵ. $+$ $BPC\Delta$ ව.ඵ. $=$ $DPC\Delta$ ව.ඵ බව සාධනය කරන්න.

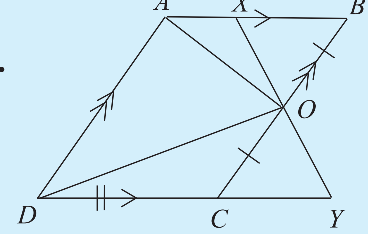
5.



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AD පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය ද, දික් කළ AB පාදය මත Q ලක්ෂ්‍යය ද පිහිටා ඇත.
$CPB\Delta$ ව.ඵ. $=$ $CQD\Delta$ ව.ඵ. බව සාධනය කරන්න.

6. 

$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ $AB // DC$ හා $DC > AB$ වේ. $AB = CE$ වන පරිදි CD පාදය මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. AFE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, ADF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන වන පරිදි DE පාදය මත F ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. $ABFD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.

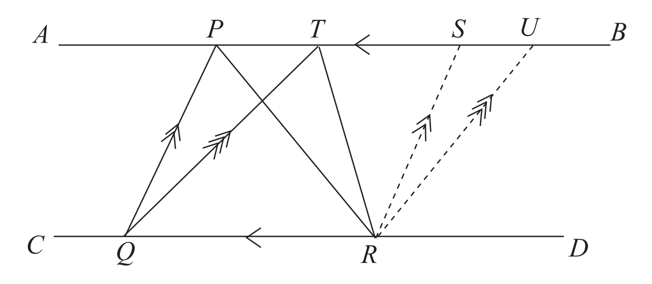
7. 

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. X යනු AB පාදය මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කළ XO හා දික් කළ DC රේඛා Y හිදී හමු වේ.

(i) BOX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = COY ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බව
(ii) $AXYD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය = $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය බව
(iii) $AXYD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, ADO ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව සාධනය කරන්න.

8.4 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර QR එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි ඕනෑ ම PQR හා TQR ත්‍රිකෝණ දෙක සලකන්න.



ඉහත 8.3 කොටසේ සාකච්ඡා කළ පරිදි

PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}$ $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

TQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}$ $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

එහෙත්, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලක් අතර, QR එක ම ආධාරකය ඇතිව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$\therefore \frac{1}{2}$ $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $\frac{1}{2}$ $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

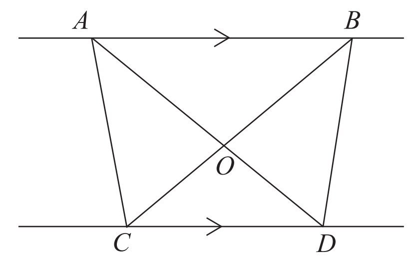
එනම්, PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = TQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

මේ අනුව QR එක ම ආධාරකය ඇතිව, AB හා CD එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතරේ පිහිටි PQR හා TQR ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය: එක ම ආධාරකයක් මත, හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

මෙම හඳුනාගත් ප්‍රමේයය භාවිත කරමින් ගැටලු විසඳන අයුරු පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ $AB//CD$ වේ.

(i) ACD ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු වූ ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයය ලියා දක්වන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 30 cm^2 නම්, ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(iii) AOC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, BOD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

(i) BCD ත්‍රිකෝණය

එක ම ආධාරකය මත, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

(ii) ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= 30 \text{ cm}^2$

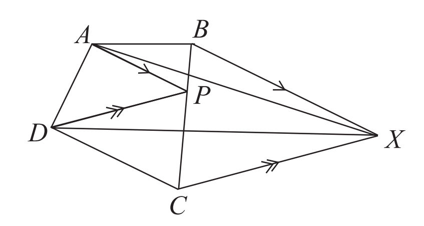
(iii) $ACD\Delta$ වර්ගඵලය $= BCD\Delta$ වර්ගඵලය (CD එක ම ආධාරකය හා $AB//CD$)

රූපය අනුව මෙම ත්‍රිකෝණ දෙකට ම COD ත්‍රිකෝණය පොදු වේ. එම කොටස ඉවත් කළ විට,

$ACD\Delta - COD\Delta = BCD\Delta - COD\Delta$

$\therefore AOC\Delta = BOD\Delta$

නිදසුන 2



$ABCD$ චතුරස්‍රයේ, BC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. AP ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාවත්, DP ට සමාන්තරව C හරහා ඇඳි රේඛාවත් Xහි දී හමුවේ. $ADX\Delta$ වර්ගඵලය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වන බව සාධනය කරන්න.

සාධනය : AP හා BX සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, AP ආධාරකය ඇතිව, APB හා APX ත්‍රිකෝණ පිහිටා ඇති නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$APB\Delta = APX\Delta \quad \text{———} \quad (1)$$

එසේම, $DP//CX$ නිසා,

$$DPC\Delta = DPX\Delta \quad \text{———} \quad (2)$$

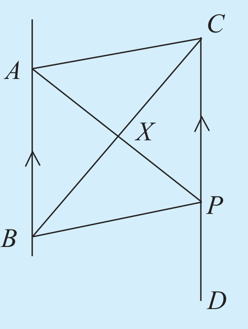
$(1) + (2)$, $ABP\Delta + DPC\Delta = APX\Delta + DPX\Delta$

දෙපසටම $ADP\Delta$ වර්ගඵලය එකතු කරමු.

එවිට, $ABP\Delta + DPC\Delta + ADP\Delta = APX\Delta + DPX\Delta + ADP\Delta$

$ABCD$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ ADX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

8.4 අභ්‍යාසය

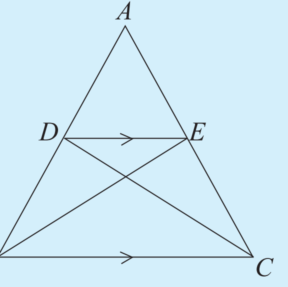


1. රූපයේ දැක්වෙන AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි, ABP ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 25 cm^2 වේ.

(i) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

(ii) ABX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 10 cm^2 නම් ACX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

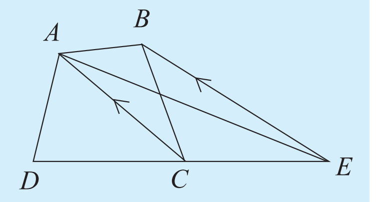
(iii) ACX හා BPX ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල අතර සම්බන්ධය කුමක් දැයි හේතු සහිතව පැහැදිලි කරන්න.



2. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය Dහි දී ද AC පාදය Eහි දී ද හමු වන සේ, BC පාදයට සමාන්තරව DE ඇඳ ඇත.

(i) BED ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න.

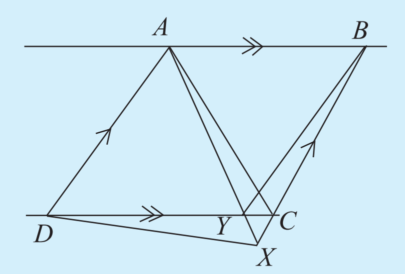
(ii) ABE හා ADC ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.



3. *ABCD* චතුරස්‍රයේ, *AC* විකර්ණයට සමාන්තරව *B* හරහා ඇඳි රේඛාව, දික් කළ *DC* රේඛාවට *E*හි දී හමුවේ.

(i) *ABC* ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න. පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

(ii) *ABCD* චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, *ADE* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.



4. *ABCD* සමාන්තරාස්‍රයේ, *A* සිට අඳින ලද ඕනෑ ම රේඛාවක් *DC* පාදය *Y*හි දී ද දික්කල *BC* පාදය *X*හි දී ද කපයි.

(i) *DYX* හා *AYC* ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

(ii) *BCY* හා *DYX* ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.

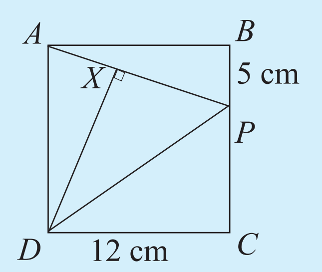
5. *ABCD* සමාන්තරාස්‍රයේ, *BC* පාදය මත *Y* ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. දික් කළ *AB* රේඛාවත්, දික් කළ *DY* රේඛාවත්, *X*හි දී හමු වේ. *AXY* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය *BCX* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

6. *BC* යනු 8 cm දිග අචල සරල රේඛා ඛණ්ඩයකි. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 40 cm^2 වන සේ වූ *A* ලක්ෂ්‍යයේ පථය දළ සටහනක් මගින් විස්තර කරන්න.

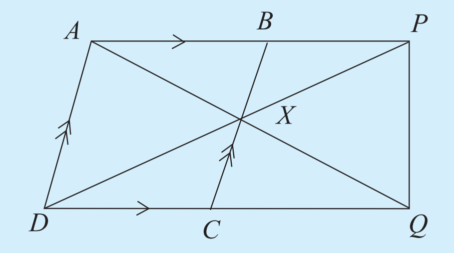
7. *AB* = 8 cm, *AC* = 7 cm හා *BC* = 4 cm වූ *ABC* ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. *AB* වලින් *C* පිහිටි පැත්තේ ම *P* පිහිටන පරිදිත්, වර්ගඵලයෙන් *ABC* ත්‍රිකෝණයට සමාන වන පරිදිත්, *PA* = *PB* වන සේත් වූ *PAB* ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. $ABCD$ සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග 12 cm වේ. $BP = 5$ cm වන සේ, BC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. D සිට AP ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය X නම් DXහි දිග සොයන්න.



2. X යනු $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කල DX පාදයට දික් කළ AB පාදය Pහි දී ද දික් කළ AX පාදයට දික් කළ DC පාදය Qහි දී ද හමු වේ. PXQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.



3. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ Oහි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. SR පාදය මත A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. POQ ත්‍රිකෝණයේ හා PAQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵල අතර අනුපාතය සොයන්න. (ඉඟිය: සුදුසු නිර්මාණයක් යොදා ගන්න.)

4. $ABCD$ හා $ABEF$ යනු AB පාදයෙහි දෙපැත්තේ අඳින ලද, වර්ගඵලයෙන් අසමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි.

(i) $DCEF$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

(ii) $DCEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය, $ABCD$ හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලයන්ගේ එකතුවට සමාන බව සාධනය කරන්න.

5. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, AB පාදය E හිදී ද AD පාදය F හිදී ද ඡේදනය වන සේ, BD ට සමාන්තරව EF ඇඳ ඇත. (ඉඟිය: සුදුසු නිර්මාණයක් යොදා ගන්න.)

(i) BEC ට හා DFC ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

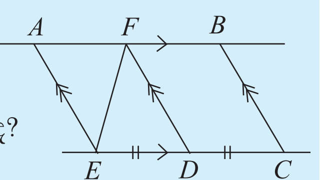
(ii) AEC ට හා AFC ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස - 1 වන වාරය

I කොටස

1. අගය සොයන්න. $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

2. $10^{0.5247} = 3.348$ නම් $\lg 0.3348$ හි අගය සොයන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව, AFE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $ABCE$ රූපයේ වර්ගඵලයෙන් කවර භාගයක් ද?

4. $A^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ නම්, A, x හා y ඇසුරෙන් දක්වන්න.

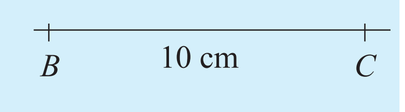
5. එක සමාන ප්‍රමාණයේ සමචතුරස්‍ර පිරමීඩ දෙකක, සමචතුරස්‍ර මුහුණත් එකට අළවා නව ඝන වස්තුවක් තනා ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $384\ \text{cm}^2$ නම්, සමචතුරස්‍ර පිරමීඩයේ ත්‍රිකෝණ මුහුණතක වර්ගඵලය සොයන්න.

6. සුළු කරන්න. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{1-x}$

7. අගය සොයන්න. $\log_3 27 - \log_4 16$

8. 1cm^3 ක ස්කන්ධය 4g වූ විශේෂ ද්‍රව්‍යයකින් තැනූ ගෝලයක ස්කන්ධය 120g ක් විය. එම ගෝලයේ පරිමාව සොයන්න.

9. රූපයේ ද ැක්වෙන B හා C ලක්ෂ්‍ය දෙක එකිනෙකට 10 cm දුරින් පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $20\ \text{cm}^2$ වන පරිදි වූ A හි පථය දළ සටහනකින් දක්වන්න.

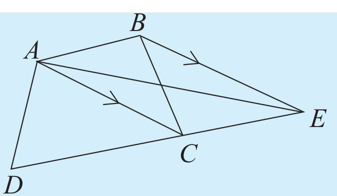


10. $\lg 5 = 0.6990$ නම් $\lg 20$ හි අගය සොයන්න.

11. විෂ්කම්භයට සමාන වූ උසකින් යුත් සිලින්ඩරයක වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය එම විෂ්කම්භයම ඇති ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලයට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

12. $\sqrt{5} = 2.23$ ලෙස ගෙන $\sqrt{20}$ හි අගය සොයන්න.

13. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, ADE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන වන බව පෙන්වන්න.



14. $\sqrt{75} \times 2\sqrt{3}$ හි අගය සොයන්න.

15. සුළු කරන්න. $\dfrac{3x}{x^2 - 1} \times \dfrac{x(x-1)}{3}$

II කොටස

1. (i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ නම් $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ හි අගය සොයන්න.

(ii) සුළු කරන්න. $\dfrac{m^2 - 4n^2}{mn(m + 2n)} \div \dfrac{m^2 - 4mn + 4n^2}{m^2n^2}$

2. (i) $2 \lg x = \lg 3 + \lg (2x - 3)$ වන්නේ x හි කවර අගයක් සඳහා ද?

(ii) $2 \lg x + \lg 32 - \lg 8 = 2$; x හි අගය සොයන්න.

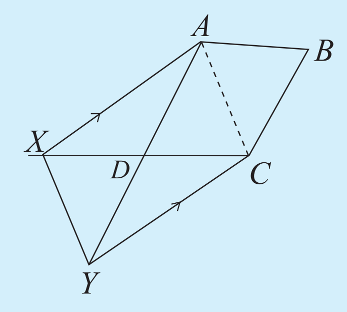
(iii) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් තොරව අගය සොයන්න.

$$\log_2 \frac{3}{4} - 2\log_2\left(\frac{3}{16}\right) + \log_2 12 - 2$$

(iv) ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් සුළු කර පිළිතුර ආසන්න දෙවන දශමස්ථානයට දක්වන්න.

$$\frac{\sqrt{0.835} \times 0.75^2}{4.561}$$

3. (a) රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ CD පාදය X තෙක් දික් කර ඇත. AX ට සමාන්තර වන සේ C හරහා ඇඳි රේඛාවට දික්කළ AD පාදය Y හිදී හමුවේ.



(i) AXY ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

(ii) XDY ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.

(b) කවකටුව, සරල දාරයක් හා cm / mm පරිමාණයක් පමණක් භාවිත කරමින්,

(i) $AB = 5.5$ cm, $A\hat{B}C = 60^{o}$ හා $BC = 4.2$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් වර්ගඵලය ඇති $ABPQ$ රොම්බසය නිර්මාණය කරන්න.

4. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ O යනු BC පාදය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකි. DO ට සමාන්තරව A හරහා ඇඳි රේඛාව, දික් කළ CB රේඛාවට P හිදී හමුවේ. දික් කළ AO රේඛාව, දික් කළ DC රේඛාවට Q හිදී හමුවේ.

(i) දී ඇති තොරතුරු ඇතුළත් කරමින් දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය හා ADO ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය අතර ඇති සම්බන්ධතාව ලියන්න.

(iii) ABP ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, BOQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

5. ඍජු කේතුවක පතුලේ අරය 7 cm ද, ලම්බ උස 12 cm ද වේ.

(i) කේතුවේ පරිමාව සොයන්න.

(ii) කේතුවේ අරය නොවෙනස්ව තබා ලම්බ උස දෙගුණ කළහොත් එම කේතුවේ පරිමාව, මුල් කේතුවේ පරිමාව මෙන් කී ගුණයක් ද?

(iii) මුල් කේතුවේ ලම්බ උස නොවෙනස් ව තබා, පතුලේ අරය දෙගුණ කළහොත් එම කේතුවේ පරිමාව මුල් කේතුවේ පරිමාව මෙන් කී ගුණයක් ද?

ලඝුගණක

மடக்கைகள்

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences (මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள்) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක

மடக்கைகள்

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාව

අ

අනන්ත දශම	முடிவில் தசமம்	Infinite decimals
අන්ත දශම	முடிவுறு தசமம்	Finite decimals
අපරිමේය සංඛ්‍යා	விகிதமுறா எண்கள்	Irrational numbers
අරය	ஆயுரை	Radius
අඛිල කරණි	முழுமைச் சேடு	Entire surds
ඇල උස	சாய் உயரம்	Slant height

එ

එකම ආධාරකය	ஒரே அடி	Same base

ඍෘ

ඍජු පිරමීඩය	செங்கூம்பகம்	Right pyramid
ඍජු වෘත්ත කේතුව	செவ்வட்டக்கூம்பு	Right circular cone

ක

කරණි	சேடு	Surds
කුඩාම පොදු ගුණාකාරය	பொதுமடங்குகளுள் சிறியது	Least common multiple
කේතුව	கூம்பு	Cone

ග

ගුණ කිරීම	பெருக்கல்	Multiplication
ගෝලය	கோளம்	Sphere

ඝ

ඝනායිතය	கன	Cubed

ත

තාත්වික සංඛ්‍යා	மெய் எண்கள்	Real numbers
ත්‍රිකෝණය	முக்கோணி	Triangle
ත්‍රිකෝණාකාර	முக்கோண வடிவான	Triangular
ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	திரிகோண விகிதங்கள்	Trignometric Ratios

ද

දර්ශක	சுட்டி	Indices
දශමාංශය	தசமக் கூட்டு	Mantissa
ද්විපද ප්‍රකාශන	ஈருறுப்புக் கோவை	Binomial Expressions

න

නිඛිල	நிறைவெண்கள்	Integers

ප

පදය	உறுப்பு	Term
පරස්පරය	நிகர்மாறு	Reciprocal
පරිමාව	கனவளவு	Volume
පරිධිය	பரிதி	Circumference
පරිමේය සංඛ්‍යා		Rational numbers
පාදය	அடி	Base
පූර්ණාංශය	சிறப்பியல்பு	Characteristic
පොදු හරය	பொதுப் பகுதி	Common denominator
ප්‍රමේයය	தேற்றம்	Theorem
ප්‍රසාරණය	விரிவு	Expansion
පිරමීඩය	கூம்பகம்	Pyramid
ප්‍රිස්මය	அரியம்	Prism
පෘෂ්ඨ වර්ගඵල	மேற்பரப்பளவு	Surface Area

බ

බලය	வலு	Power
බෙදීම	வகுத்தல்	Division

ය

යතුර	சாவி	Key

ල

ලඝුගණක	மடக்கை	Logarithm
ලම්බ උස	செங்குத்துயரம்	Perpendicular height
ලවය	தொகுதி	Numerator

ව

වර්ගඵලය	பரப்பளவு	Area
වර්ගායිතය	வர்க்கம்	Squared
විද්‍යාත්මක අංකනය	விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு	Scientific notation
විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රය	விஞ்ஞானமுறைக் கணிகருவி	Scientific calculator
වියුති	பிரிகோடு	Bar
වීජීය භාග	அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	Algebraic Fractions
වෘත්තාකාර	வட்ட வடிவான	Circular
වක්‍ර පෘෂ්ඨය	வளை மேற்பரப்பளவு	Curved Surface

ස

සමචතුරස්‍රාකාර	சதுர வடிவான	Square shape
සමාන්තරාස්‍රය	இணைகரம்	Parallelogram
සමාන්තර රේඛා	சமாந்தரக் கோடுகள்	Parallel lines
සමාවර්ත දශම	மீளும் தசமம்	Recurring decimals

හ

හරය	பகுதி	Denominator

පාඩම් අනුක්‍රමය

පෙළපොතේ පරිච්ඡේදය	කාලච්ඡේද ගණන
1 වාරය	
1. තාත්වික සංඛ්‍යා	10
2. දර්ශක හා ලඝුගණක I	08
3. දර්ශක හා ලඝුගණක II	06
4. ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	05
5. ඝන වස්තුවල පරිමාව	05
6. ද්විපද ප්‍රකාශන	04
7. වීජීය භාග	04
8. සමාන්තර රේඛා අතර තලරූපවල වර්ගඵලය	12
2 වාරය	
09. ප්‍රතිශත	06
10. කොටස් වෙළෙඳ පොළ	05
11. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය	05
12. ප්‍රස්තාර	12
13. සමීකරණ	10
14. සමකෝණී ත්‍රිකෝණ	12
15. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය	12
16. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි	06
3 වාරය	
17. පයිතගරස් ප්‍රමේයය	04
18. ත්‍රිකෝණමිතිය	12
19. න්‍යාස	08
20. අසමානතා	06
21. වෘත්ත චතුරස්‍ර	10
22. ස්පර්ශක	10
23. නිර්මාණ	05
24. කුලක	06
25. සම්භාවිතාව	07

ගණිතය

11 ශ්‍රේණිය

II කොටස

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව



සියලු ම පෙළපොත් ඉලෙක්ට්‍රොනික් මාධ්‍යයෙන් ලබා ගැනීමට www.edupub.gov.lk වෙබ් අඩවියට පිවිසෙන්න.

පළමුවන මුද්‍රණය - 2015
දෙවන මුද්‍රණය - 2016
තුන්වන මුද්‍රණය - 2017
හතරවන මුද්‍රණය - 2018
පස්වන මුද්‍රණය - 2019

ISBN 978-955-25-0410-5

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
පානළුව, පාදුක්ක පිහිටි රජයේ මුද්‍රණ නීතිගත සංස්ථාවේ
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත්කරන ලදි.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා
ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා
අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා
පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා
නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
ඔබ වේ අප විද්‍යා
ඔබ ම ය අප සත්‍යා
ඔබ වේ අප ශක්ති
අප හද තුළ භක්ති
ඔබ අප ආලෝකේ
අපගේ අනුප්‍රාණේ
ඔබ අප ජීවන වේ
අප මුක්තිය ඔබ වේ
නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා
ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා
එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා
යමු යමු වී නොපමා
ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

අපි වෙමු එක මවකගෙ දරුවෝ
එක නිවසෙහි වෙසෙනා
එක පාටැති එක රුධිරය වේ
අප කය තුළ දුවනා

එබැවිනි අපි වෙමු සොයුරු සොයුරියෝ
එක ලෙස එහි වැඩෙනා
ජීවත් වන අප මෙම නිවසේ
සොඳින සිටිය යුතු වේ

සැමට ම මෙත් කරුණා ගුණෙනී
වෙළී සමගි දමිනී
රන් මිණි මුතු නො ව එය ම ය සැපතා
කිසි කල නොම දිරනා

ආනන්ද සමරකෝන්



"අලුත් වෙමින්, වෙනස් වෙමින්, නිවැරැදි දැනුමෙන්
රටට වගෙ ම මුළු ලොවට ම වෙන්න නැණ පහන්"

ගරු අධ්‍යාපන අමාත්‍යතුමාගේ පණිවුඩය

ගෙවී ගිය දශක දෙකකට ආසන්න කාලය ලෝක ඉතිහාසය තුළ සුවිශේෂී වූ තාක්ෂණික වෙනස්කම් රැසක් සිදුවූ කාලයකි. තොරතුරු තාක්ෂණය, සන්නිවේදනය ප්‍රමුඛ කරගත් සෙසු ක්ෂේත්‍රවල ශීඝ්‍ර දියුණුවත් සමඟ වත්මන් සිසු දරු දැරියන් හමුවේ නව අභියෝග රැසක් නිර්මාණය වී තිබේ. අද සමාජයේ පවතින රැකියාවල ස්වභාවය නුදුරු අනාගතයේ දී සුවිශේෂී වෙනස්කම් රැසකට ලක් වනු ඇත. එවන් වටපිටාවක් තුළ නව තාක්ෂණික දැනුම සහ බුද්ධිය කේන්ද්‍ර කරගත් සමාජයක වෙනස් ආකාරයේ රැකියා අවස්ථා ද ලක්ෂ ගණනින් නිර්මාණය වනු ඇත. ඒ අනාගත අභියෝග ජයගැනීම වෙනුවෙන්, ඔබ සවිබල ගැන්වීම අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මගේත්, අප රජයේත් ප්‍රමුඛ අරමුණයි.

නිදහස් අධ්‍යාපනයේ මාහැඟි ප්‍රතිලාභයක් ලෙස නොමිලේ ඔබ අතට පත් වන මෙම පොත මනාව පරිශීලනය කිරීමත්, ඉන් අවශ්‍ය දැනුම උකහා ගැනීමත් ඔබේ ඒකායන අරමුණ විය යුතු ය. එමෙන් ම ඔබේ මවුපියන් ඇතුළු වැඩිහිටියන්ගේ ශ්‍රමයේ සහ කැපකිරීමේ ප්‍රතිඵලයක් ලෙස රජය විසින් නොමිලේ පාසල් පෙළපොත් ඔබ අතට පත් කරනු ලබන බව ද ඔබ වටහා ගත යුතු ය.

ලෝකය වේගයෙන් වෙනස් වන වටපිටාවක, නව ප්‍රවණතාවලට ගැළපෙන අයුරින් නව විෂය මාලා සකස් කිරීමටත්, අධ්‍යාපන පද්ධතිය තුළ තීරණාත්මක වෙනස්කම් සිදු කිරීම සඳහාත් රජයක් ලෙස අප කටයුතු කරන්නේ රටක අනාගතය අධ්‍යාපනය මතින් සිදු වන බව අප හොඳින් ම අවබෝධ කරගෙන සිටින බැවිනි. නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල භුක්ති විඳිමින්, රටට පමණක් නොව ලොවට ම වැඩදායී ශ්‍රී ලාංකික පුරවැසියකු ලෙස නැඟී සිටින්නට ඔබ ද අදිටන් කරගත යුතු වන්නේ එබැවිනි. ඒ සඳහා මේ පොත පරිශීලනය කිරීමෙන් ඔබ ලබන දැනුම ද ඉවහල් වනු ඇති බව මගේ විශ්වාසයයි.

රජය ඔබේ අධ්‍යාපනය වෙනුවෙන් වියදම් කරන අතිවිශාල ධනස්කන්ධයට වටිනාකමක් එක් කිරීම ද ඔබේ යුතුකමක් වන අතර, පාසල් අධ්‍යාපනය හරහා ඔබ ලබා ගන්නා දැනුම හා කුසලතා ඔබේ අනාගතය තීරණය කරන බව ද ඔබ හොඳින් අවබෝධ කර ගත යුතු ය. ඔබ සමාජයේ කුමන තරාතිරමක සිටිය ද සියලු බාධා බිඳ දමමින් සමාජයේ ඉහළ ම ස්තරයකට ගමන් කිරීමේ හැකියාව අධ්‍යාපනය හරහා ඔබට හිමි වන බව ද ඔබ හොඳින් අවධාරණය කර ගත යුතු ය.

එබැවින් නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල ලබා, ගෞරවනීය පුරවැසියකු ලෙස හෙට ලොව දිනන්නටත් දේශ දේශාන්තරවල පවා ශ්‍රී ලාංකේය නාමය බබළවන්නටත් ඔබට හැකි වේවා! යි අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මම ශුභ ප්‍රාර්ථනය කරමි.

අකිල විරාජ් කාරියවසම්
අධ්‍යාපන අමාත්‍ය

පෙරවදන

ලෝකයේ ආර්ථික, සමාජීය, සංස්කෘතික හා තාක්ෂණික සංවර්ධනයත් සමඟ අධ්‍යාපන අරමුණු වඩා සංකීර්ණ ස්වරූපයක් ගනී. මිනිස් අත්දැකීම්, තාක්ෂණික වෙනස්වීම්, පර්යේෂණ සහ නව දර්ශක ඇසුරෙන් ඉගෙනීමේ හා ඉගැන්වීමේ ක්‍රියාවලිය ද නවීකරණය වෙමින් පවතියි. එහිදී ශිෂ්‍ය අවශ්‍යතාවලට ගැළපෙන ලෙස ඉගෙනුම් අත්දැකීම් සංවිධානය කරමින් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය පවත්වාගෙන යාම සඳහා විෂය නිර්දේශයේ දැක්වෙන අරමුණුවලට අනුකූලව, විෂයානුබද්ධ කරුණු ඇතුළත්ව පෙළපොත සම්පාදනය වීම අවශ්‍ය ය. පෙළපොත යනු ශිෂ්‍යයාට ඉගෙනීමේ උපකරණයක් පමණක් නොවේ. එය ඉගෙනුම් අත්දැකීම් ලබා ගැනීමටත් නැණ ගුණ වර්ධනයටත් චර්යාමය හා ආකල්පමය වර්ධනයක් සහිතව ඉහළ අධ්‍යාපනයක් ලැබීමටත් ඉවහල් වන ආශීර්වාදයකි.

නිදහස් අධ්‍යාපන සංකල්පය යථාර්ථයක් බවට පත්කරමින් 1 ශ්‍රේණියේ සිට 11 ශ්‍රේණිය දක්වා සියලු ම පෙළපොත් රජයෙන් ඔබට තිළිණ කෙරේ. එම ග්‍රන්ථවලින් උපරිම ඵල ලබන අතර ම ඒවා රැක ගැනීමේ වගකීම ද ඔබ සතු බව සිහිපත් කරමි. පූර්ණ පෞරුෂයකින් හෙබි, රටට වැඩදායී යහපත් පුරවැසියකු වීමේ පරිචය ලබා ගැනීමට මෙම පෙළපොත ඔබට උපකාරී වෙතැයි මම අපේක්ෂා කරමි.

මෙම පෙළපොත් සම්පාදනයට දායක වූ ලේඛක, සංස්කාරක හා ඇගයුම් මණ්ඩල සාමාජික මහත්ම මහත්මීන්ටත් අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයටත් මාගේ ස්තුතිය පළ කර සිටිමි.

ඩබ්ලිව්. එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව,
ඉසුරුපාය,
බත්තරමුල්ල.
2019.04.10

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

ඩබ්ලිව්.එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක මයා - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි මිය - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

චන්දිමා කුමාරි ද සොයිසා මිය - සහකාර කොමසාරිස් (2019 නැවත මුද්‍රණය)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සංස්කාරක මණ්ඩලය

ආචාර්ය ඩී.කේ. මල්ලව ආරච්චි මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය රොමේන් ජයවර්ධන මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ශ්‍රී ධරන් මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
බී.ඩී. චිත්තානන්ද බියන්විල මයා - අධ්‍යක්ෂ, ගණිතය අංශය, අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
ජී.පී.එච්. ජගත් කුමාර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

එච්.එම්.ඒ. ජයසේන මයා - ගුරු උපදේශක, (විශ්‍රාමික)
වයි.වී.ආර්. විතාරම මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, දෙහිඕවිට
ඩබ්.එම්.ඩබ්.සී වලිසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, කෑගල්ල
අජිත් රණසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හෝමාගම
අනුර ඩී. වීරසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, (පිරිවෙන්), මාතර දිස්ත්‍රික්කය
ඩබ්ලිව්.එම්.ඩී. ලාල් විජේකාන්ත මයා - ගුරු සේවය, ශාන්ත තෝමස් විද්‍යාලය, ගල්කිස්ස
ආචාර්ය රෝචනා මීගස්කුඹුර මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, පේරාදෙණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජේ. රත්නායක මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජයන්ත සේනාධීර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ආර්. ටී. සමරතුංග මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
අයි.එන්. වාගීෂමූර්ති මයා - අධ්‍යක්ෂ, (විශ්‍රමික)
ආර්.එස්.ඊ. පුෂ්පරාජන් මයා - සහකාර අධ්‍යක්ෂ,කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, පුත්තලම
වී. මුරලි මයා - ගුරු අධ්‍යාපනඥ සේවය, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය,වවුනියාව

භාෂා සංස්කරණය

ජයත් පියදසුන් මයා - මාධ්‍යවේදී, කර්තෘ මණ්ඩලය - සිළුමිණ

සෝදුපත් කියවීම

ඩී.යූ. ශ්‍රීකාන්ත එදිරිසිංහ මයා - ගුරු සේවය, ගොඩගම සුභාරතී මහාමාත්‍ය මහා විද්‍යාලය

රූපසටහන් පිටකවර නිර්මාණය පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය

ආර්.ඩී. තිළිණි සෙව්වන්දි මෙය මිය - පරිගණක සහායක, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව
බී.ටී. චතුරාණි පෙරේරා - පරිගණක සහායක, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්පාදක මණ්ඩල සටහන

2015 වර්ෂයේ සිට ක්‍රියාත්මක වන නව විෂය නිර්දේශයට අනුකූලව මෙම පෙළපොත රචනා කර ඇත.

පෙළපොත සම්පාදනය කෙරෙන්නේ සිසුන් වෙනුවෙනි. එබැවින්, ඔබට තනිව කියවා වුව ද තේරුම් ගත හැකි පරිදි සරල ව සහ විස්තරාත්මක ව එය රචනා කිරීමට උත්සාහ ගත්තෙමු.

විෂය සංකල්ප ආකර්ශනීය අන්දමින් ඉදිරිපත් කිරීම සහ තහවුරු කිරීම සඳහා, විස්තර කිරීම්, ක්‍රියාකාරකම්, සහ නිදසුන් වැනි විවිධ ක්‍රම අනුගමනය කළෙමු. තව ද, අභ්‍යාස කිරීමේ රුචිකත්වය වර්ධනය වන පරිදි ඒවා සරල සිට සංකීර්ණ දක්වා අනුපිළිවෙළින් පෙළ ගස්වා තිබේ.

ගණිත විෂයයට අදාළ සංකල්ප දැක්වෙන පද, රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුව සම්පාදනය කරන ගණිතය පාරිභාෂික පදමාලාවට අනුකූලව භාවිත කළෙමු.

විෂය නිර්දේශයේ 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් ඉගෙන ගැනීමට මින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගත් යම් යම් විෂය කරුණු අවශ්‍ය වේ. එබැවින් එම පෙර දැනුම සිහි කිරීම පිණිස පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස සෑම පරිච්ඡේදයකම ආරම්භයේ දැක්වෙයි. ඒවා මගින් 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් සඳහා ඔබව සූදානම් කෙරෙනු ඇත.

ඊට අමතරව 10 ශ්‍රේණියේහි පෙළපොත සිසුන් ළඟ තිබෙන බැවින් පෙර දැනුම අවශ්‍ය වන විටදී එය ද භාවිතයට ගනු ඇතැයි අපි බලාපොරොත්තු වෙමු.

පන්තියේ දී ගුරුවරයා විසින් ඉගැන්වීමට පෙර, ඔබ මේ පරිච්ඡේද කියවීමෙන් සහ ඒ ඒ පරිච්ඡේදයේ එන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස කිරීමෙන්, මේ පොත භාවිතයෙන් උපරිම ඵල ලැබිය හැකි ය.

ගණිත අධ්‍යාපනය ප්‍රීතිමත් සහ ඵලදායක වන්නැයි අපි ප්‍රාර්ථනා කරමු.

සම්පාදක මණ්ඩලය

පටුන

09



මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට ණය වාරික ගණනය කිරීමට
- හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට ණය වාරිකය දී ඇති විට පොලී අනුපාතිකය ගණනය කිරීමට
- වැල් පොලිය සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ප්‍රතිශත සම්බන්ධයෙන් ඔබ මෙතෙක් උගත් විෂය කරුණු නැවත මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. ප්‍රතිශත ගණනය කරන්න.

a. රුපියල් 800න් 12% **b.** කිලෝමීටර 1 න් 8%

c. ග්‍රෑම් 1 200න් 2.5% **d.** ලීටර 2.5 න් 25%

2. රුපියල් 500ට මිල දී ගත් අත් ඔරලෝසුවක් රුපියල් 600ට විකුණූ වෙළෙන්දකුට ලැබෙන ලාභ ප්‍රතිශතය ගණනය කරන්න.

3. රුපියල් 8 000ක් 6%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයට ණයට ගත් පුද්ගලයකු වසරකට ගෙවිය යුතු පොලිය ගණනය කරන්න.

4. රුපියල් 5 000ක් 10%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ ණයට ගත් පුද්ගලයකුට වසර 2කට පසු ගෙවීමට සිදු වන මුළු පොලිය ගණනය කරන්න.

5. 2%ක මාසික සුළු පොලී ප්‍රතිශතයක් යටතේ රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත් සුනිමල්ට මාස 3කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවීමට සිදු වන මුළු මුදල කොපමණ ද?

හැඳින්වීම

අප විසින් එදිනෙදා ජීවිතයේ දී කරනු ලබන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් සහ ප්‍රාග්ධන වියදම් වශයෙන් කොටස් දෙකකට වෙන් කළ හැකි ය. නැවත නැවත දැරීමට සිදු වන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් ලෙස හැඳින්වේ. නිදසුන් ලෙස, ආහාරපාන, ඇඳුම්පැලඳුම්, බෙහෙත් ආදිය මිල දී ගැනීම හා විදුලි බිල්පත් ආදිය ගෙවීම සඳහා කරනු ලබන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් ලෙස දැක්විය හැකි ය. නැවත නැවත දැරීමට සිදු නොවන වියදම් ප්‍රාග්ධන වියදම් ලෙස හැඳින්වේ. නිදසුන් ලෙස, ඉඩම්, නිවාස, වාහන, යන්ත්‍රසූත්‍ර හෝ ගෘහභාණ්ඩ මිලට ගැනීම සඳහා කරනු ලබන වියදම් ප්‍රාග්ධන වියදම් ලෙස දැක්විය හැකි ය. එවැනි වියදම් ප්‍රමාණාත්මක ව විශාල වන බැවින් ඒ සඳහා අවශ්‍ය මුදල්, මූල්‍ය ආයතනයකින් හෝ තමා සේවය කරන සේවා ස්ථානයෙන් ණය මුදලක් ලෙස ලබා ගැනීම බොහෝ විට සිදු වේ.

එසේ ලබා ගන්නා ණය මුදලක් එක වර ආපසු ගෙවීම සාමාන්‍යයෙන් සිදු නොකෙරෙන අතර, දීර්ඝ කාලයක් තුළ මාසික ව කොටස් වශයෙන් ගෙවීම සිදු කරනු ලැබේ. තව ද එවැනි ණය මුදලක් ලබා ගත් විට ණය මුදලට අමතර ව පොලියක් ද ගෙවීමට ද සිදු වේ. මාසික ව ගෙවීමට සිදු වන පොලියේ හා ණය කොටසේ එකතුව ණය වාරිකයක් ලෙස හැඳින්වේ.

නමුත් ඇතැම් ආයතන තම ආයතනය මගින් නිෂ්පාදනය කෙරෙන හෝ ගෙන්වා බෙදාහැරෙන භාණ්ඩවල අලෙවිය වැඩි කර ගැනීම සඳහා පොලී රහිත ව ණය මුදල පමණක් වාරික ලෙස ගෙවීමට හැකි වන සේ භාණ්ඩ අලෙවි කරන අවස්ථා ද දැකිය හැකි ය.

නිදසුන 1

ගෘහ භාණ්ඩ නිෂ්පාදන සමාගමක් මගින් නිෂ්පාදනය කෙරෙන රුපියල් 30 000ක් වටිනා ලී අල්මාරියක් පොලී රහිත මාසික වාරික 12කින් ගෙවීමේ කොන්දේසිය මත අලෙවි කරනු ලැබේ. මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය වාරිකය කොපමණ ද?

$$\text{ණය වාරිකයක වටිනාකම} = \text{රු} \ \frac{30\,000}{12}$$

$$= \underline{\underline{\text{රු} \ 2\,500}}$$

නිදසුන 2

රාජ්‍ය ආයතනයක සේවය කරන පුද්ගලයකුට උත්සව අත්තිකාරම් ලෙස රුපියල් 5 000ක මුදලක් ලබාදෙන අතර එම මුදල පොලී රහිත ව මාසික වාරික 10ක් තුළ ගෙවා නිම කළ යුතු ය. එම මුදල මාසික ව වැටුපෙන් අඩු කරනු ලබයි නම් මාසික ව වැටුපෙන් අඩු වන මුදල කොපමණ ද?

$$\text{මාසික ව වැටුපෙන් අඩු වන මුදල} = \text{රු} \ \frac{5\,000}{10}$$

$$= \underline{\underline{\text{රු} \ 500}}$$

9.1 හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම

පොලිය අය කර ගන්නා අවස්ථාවල දී පොලිය ගණනය කෙරෙන ක්‍රම විවිධ වේ. හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම වඩාත් සුලභ ක්‍රමයකි. ඒ පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

මාසික වාරික ලෙස ආපසු ගෙවීම සඳහා කිසියම් ආයතනයකින් ණය මුදලක් ගත් විට හෝ භාණ්ඩයක වටිනාකමින් කොටසක් පමණක් මුලින් ගෙවා ඉතිරි මුදල මාසික වාරික මගින් ආපසු ගෙවීමේ පොරොන්දුව පිට භාණ්ඩ මිල දී ගෙන ඇති විට, ණය මුදලට අමතර ව පොලියක් ද ගෙවීමට බොහෝ විට සිදු වේ.

මෙම ක්‍රමය යටතේ සෑම මාසයක් තුළ ම ණය මුදලින් කොටසක් ගෙවනු ලබයි. පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ ගෙවීමට ඇති ණය මුදල සඳහා ය. එබැවින් ගෙවීමට ඇති ණය

මුදල මාස් පතා අඩු වන බැවින් පොලිය ද මාස් පතා ගණනය කරනු ලැබේ. එම නිසා මෙම ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීම, හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම ලෙස හැඳින්වේ. එසේ ගණනය කිරීමෙන් පසු, සෑම මාසයකම එකම මුදලක් වාරිකය ලෙස ගෙවිය යුතු වන පරිදි මාසික වාරිකයක අගය සොයනු ලැබේ.

හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කෙරෙන ආකාරය හා මාසික වාරිකයක අගය සොයන ආකාරය අවබෝධ කර ගැනීම සඳහා පහත නිදසුන් අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 1

වික්‍රමසිංහ මහතා 24%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරෙන බැංකුවකින් ව්‍යාපාරික ණයක් ලෙස රුපියල් 30 000ක මුදලක් ගෙන ඇත. එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික 6කින් ගෙවා නිම කළ යුතු අතර, පොලිය අය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ඔහු විසින් ගෙවිය යුතු මාසික වාරිකයක් සොයන්න.

ලබාගෙන ඇති ණය මුදල = රු 30 000

පොලිය රහිත ණය වාරිකයක අගය = රු $\frac{30\ 000}{6}$

= රු 5 000

මෙම ක්‍රමයට සෑම මාසයක දී ම ණය ශේෂය රුපියල් 5 000 බැගින් අඩු වන අතර, පොලිය අය කරනු ලබන්නේ ඉතිරි වන ණය ශේෂය සඳහා ය.

අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය = 24%

ඒ අනුව මාසික පොලී අනුපාතිකය = 2%

පළමු මාසයට පොලිය = රු $30\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 600

දෙවන මාසයට පොලිය = රු $25\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 500

තුන්වන මාසයට පොලිය = රු $20\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 400

හතරවන මාසයට පොලිය = රු $15\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 300

පස්වන මාසයට පොලිය = රු $10\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 200

හයවන මාසයට පොලිය = රු $5\ 000 \times \frac{2}{100}$

= රු 100

ඒ අනුව ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය = රු 600 + 500 + 400 + 300 + 200 + 100
= රු 2 100

මාස 6 අවසානයේ ගෙවිය යුතු මුදල = පොලිය රහිත ණය මුදල + පොලිය

එවිට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල = රු 30 000 + 2 100
= රු 32 100

$\therefore$ මාසික වාරිකයක අගය = රු 32 100 ÷ 6
= රු 5 350

ඉහත දක්වා ඇති ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීම සඳහා විශාල කාලයක් වැය වේ. එම නිසා පහසුවෙන් පොලිය ගණනය කිරීම සඳහා පහත දැක්වෙන ක්‍රමවේදය සලකා බලමු.

මසක දී ගෙවිය යුතු ණය කොටසක් සඳහා පොලිය = රු $5\,000 \times \frac{2}{100}$
= රු 100

ඒ අනුව,
ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය = රු $100 \times 6 + 100 \times 5 + 100 \times 4 + 100 \times 3 + 100 \times 2 + 100 \times 1$
= රු $100\,(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$
= රු 100×21
= රු 2 100

මෙහි 21 යනු මාස 6 තුළ ම ගෙවීමට ඇති ණය කොටස් ගණනේ (රුපියල් 5 000 කොටස් ගණනේ) එකතුව වේ. එය **මාස ඒකක ගණන** ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ. ඒ අනුව,

මාස ඒකක ගණන $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

එම අගයන් සමාන්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස සැලකූ විට ඒවායේ ඓක්‍යය $\frac{n}{2}(a + l)$ සූත්‍රය මගින් ද ගණනය කළ හැකි ය.

එවිට, මාස ඒකක ගණන $= \frac{6}{2}(6 + 1)$
$= 3 \times 7$
$= 21$

එනම්, මාස ඒකක ගණන $= \frac{\text{වාරික ගණන}}{2}$ (වාරික ගණන + 1) මගින් ලබා ගත හැකි ය.
ඒ අනුව,

ණය ගෙවිය යුතු මාසික වාරික ගණන n නම්

මාස ඒකක ගණන $= \frac{n}{2}(n + 1)$ වේ.

නිදසුන 2

අත්පිට මුදලට රුපියල් 25 000ක් වූ රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් මුලින් රුපියල් 7 000ක් ගෙවා ඉතිරිය වසරක් තුළ සමාන මාසික වාරික මගින් ගෙවීමට ලබාගත හැකි ය. ණය සඳහා හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ 18%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කරනු ලබයි නම් මාසික වාරිකයක් ගණනය කරන්න.

රූපවාහිනී යන්ත්‍රයේ වටිනාකම = රු 25 000
පළමු ව ගෙවිය යුතු මුදල = රු 7 000
∴ ගෙවීමට ඇති ඉතිරි ණය මුදල = රු 25 000 – 7 000
= රු 18 000
ණය ගෙවිය යුතු කාලය = මාස 12
∴ මසක දී ගෙවිය යුතු ණය කොටස = රු 18 000 ÷ 12
= රු 1 500
මාස ඒකකයකට පොලිය = රු $1\ 500 \times \frac{18}{100} \times \frac{1}{12}$
= රු 22.50
පොලිය ගෙවිය යුතු මාස ඒකක ගණන = $\frac{12}{2}(12 + 1)$
= 6×13
= 78
∴ ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය = රු 22.50×78
= රු 1 755
∴ ගෙවිය යුතු මුළු මුදල = රු 18 000 + 1 755
= රු 19 755
∴ මාසික වාරිකයක වටිනාකම = රු 19 755 ÷ 12
= රු 1 646.25

නිදසුන 3

වෙළෙඳසලක දක්නට තිබූ දැන්වීමකින් උපුටාගත් කොටසක් පහත දැක්වේ.

> රුපියල් 30 000ක් වටිනා රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් මුලින් රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 2 720 බැගින් වූ සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවීමට ලබාගන්න.

ණය සඳහා පොලිය ගණනය කර ඇත්තේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය ගණනය කරන්න.

රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයේ වටිනාකම = රු 30 000
පළමු ව ගෙවිය යුතු මුදල = රු 5 000
ගෙවීමට ඇති ඉතිරි ණය මුදල = රු 30 000 – 5 000
= රු 25 000

මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය කොටස $= $ රු 25 000 $\div$ 10
$= $ රු 2 500
වාරික ලෙස ගෙවිය යුතු මුළු මුදල $= $ රු 2 720 $\times$ 10
$= $ රු 27 200
ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය $= $ රු 27 200 – 25 000
$= $ රු 2 200
මාස ඒකක ගණන $= \frac{10}{2}(10 + 1)$
$= 55$
මාස ඒකකයකට පොලිය $= $ රු 2 200 $\div$ 55
$= $ රු 40
අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය $= \frac{40}{2\,500} \times 100\% \times 12$

$= \underline{\underline{19.2\%}}$

9.1 අභ්‍යාසය

1. සඳමිණි 12%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කරන බැංකුවකින් රුපියල් 50 000ක ණය මුදලක් ගත්තා ය. එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවා නිම කළ යුතු ය.

(i) මසක දී ගෙවන ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
(ii) ණය කොටසක් සඳහා මසකට ගෙවිය යුතු පොලිය කොපමණ ද?
(iii) පොලී ගෙවිය යුතු මාස ඒකක ගණන කීය ද?
(iv) හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ණය මුදල සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය සොයන්න.
(v) මාසික වාරිකයක අගය සොයන්න.

2. රජයේ සේවකයකුට තම මාසික වැටුප මෙන් දස ගුණයක මුදලක් 3%ක වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ ණය මුදලක් ලෙස ලබාගත හැකි අතර, එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික ලෙස වසර 5ක් තුළ ගෙවා නිම කළ යුතු ය. නිමල්ගේ මාසික වැටුප රුපියල් 30 000ක් වේ.

(i) නිමල්ට ලබා ගත හැකි ණය මුදල කොපමණ ද?
(ii) ණය මුදල ගෙවීමට දී ඇති කාලය මාස කීය ද?
(iii) ණය සඳහා පොලිය අය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය ගණනය කරන්න.
(iv) හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ණය පියවීම සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.
(v) මාසික වාරිකයක අගය සොයන්න.

3. රුපියල් 35 000ක් වටිනා කෑම මේසයක් මුලින් රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය සමාන මාසික වාරික 15කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබා ගත හැකි ය. ණය සඳහා 18%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරෙන අතර, පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට වේ. ගෙවිය යුතු ණය වාරිකයක අගය සොයන්න.

4. අත්පිට මුදලට රුපියල් 150 000ක් වූ යතුරු පැදියක් මුලින් රුපියල් 30 000ක් ගෙවා ඉතිරිය 24%ක වාර්ෂික පොලියක් සමග සමාන මාසික වාරිකවලින් වසර 2 කදී ගෙවා නිම කළ හැකි ය. පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ගෙවිය යුතු ණය වාරිකයක අගය සොයන්න.

5. කුමාර් මහතා රුපියල් 12 000ක ණය මුදලක් සමාන මාසික වාරික 6කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබා ගෙන ඇත. මාසික වාරිකයක වටිනාකම රුපියල් 2 100කි.

(i) මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
(ii) වාරික ලෙස ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.
(iii) ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය සොයන්න.
(iv) මාස ඒකක ගණන සොයන්න.
(v) මාස ඒකකයකට පොලිය සොයන්න.
(vi) වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

6. අත්පිට මුදලට රුපියල් 36 000ක් වූ ශීතකරණයක් මුලින් රුපියල් 6 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 1 500 බැගින් සමාන මාසික වාරික 24කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබාගත හැකි ය. පොලිය ගණනය කර ඇත්තේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කර ඇති වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

7. රෙදි මහන යන්ත්‍රයක් අත්පිට මුදලට රුපියල් 23 000කට විකිණේ. වාරික ලෙස ගෙවීමේ ක්‍රමයට පළමු ව රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 2 000 බැගින් සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවා නිම කිරීමට ද ඉහත යන්ත්‍රය මිල දී ගත හැකි ය. ණය සඳහා පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කෙරෙන වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

9.2 වැල් පොලිය

ණය මුදලක් හෝ තැන්පත් මුදලක් සඳහා පොලිය ගණනය කරන තවත් ක්‍රමයක් ලෙස වැල් පොලී ක්‍රමය හැඳින්වීමට හැකි ය. මෙම ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කෙරෙන ආකාරය නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

10%ක වාර්ෂික පොලියක් ගෙවන බැංකුවක වසර 3ක කාලයක් තුළ රුපියල් 25 000ක ස්ථාවර තැන්පතුවක් පවත්වාගෙන ගිය පුද්ගලයකුට වසර 3 අවසානයේ බැංකුව මගින් ලබා දී ඇති ගිණුම් වාර්තාවක් පහත දැක්වේ.

දිනය	විස්තරය	තැන්පත් මුදල (රු)	පොලිය (රු)
2013.01.01	මුදල් තැන්පතු	25 000.00	_
2013.12.31	පොලිය	_	2 500.00
2014.01.01	ශේෂය	27 500.00	_
2014.12.31	පොලිය	_	2 750.00
2015.01.01	ශේෂය	30 250.00	_
2015.12.31	පොලිය	_	3 025.00
2016.01.01	ශේෂය	33 275. 00	_

ඉහත වාර්තාව අනුව මුදල් තැන්පත්කරුට 2013 වර්ෂය සඳහා රුපියල් 2 500ක පොලී මුදලක් ලැබී ඇත. එම පොලී මුදල රුපියල් 25 000ක් වූ තැන්පතු මුදලින් 10%ක් බව පැහැදිලි ය. එම වාර්තාවට අනුව 2014.01.01 දිනට ගිණුමේ තැන්පත් ව ඇති මුළු මුදල ලෙස සලකා ඇත්තේ මුලින් තැන්පත් කළ මුදල හා 2013 වර්ෂයට ලැබුණු පොලී මුදලේ එකතුව වූ රුපියල් 27 500කි. තව ද, 2014 වර්ෂය සඳහා ලැබී ඇති පොලිය රුපියල් 2 750ක් වන අතර, එය රුපියල් 27 500ක් වූ මුළු මුදලින් 10%ක් බව පැහැදිලි ය. මේ ආකාරයට සෑම වර්ෂයක් අවසානයේ ම ලැබෙන පොලිය, පොලිය ගණනය කෙරෙන මුදලට එකතු කර ලැබෙන අගය මුළු මුදල ලෙස සලකා, ඊළඟ වර්ෂය සඳහා පොලිය ගණනය කර ඇති බව පෙනේ.

මේ ආකාරයට සෑම වසරක දී ම පොලිය ගණනය කිරීමේ දී මුල් මුදලට පමණක් නො ව වාර්ෂික ව එකතු වී ඇති පොලියට ද පොලියක් ලබා දී ඇත. එම නිසා මෙම ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීමේ ක්‍රමය **වැල් පොලී** ක්‍රමය ලෙස හැඳින්වේ.

තැන්පත් මුදල් සඳහා පොලිය ගණනය කිරීමේ දී මෙන් ම ණය මුදලක් ලබා ගැනීමේ දී ද, ණය මුදල සඳහා පොලිය ගණනය කිරීම වැල් පොලී ක්‍රමයට සිදු කරනු ලැබේ.

නිදසුන 1

10%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත් පුද්ගලයකුට අවුරුදු 2ක් අවසානයේ දී ණයෙන් නිදහස් වීම සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.

ණයට ගත් මුදල = රු 10 000

වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකය = 10%

පළමු අවුරුද්ද සඳහා පොලිය $= \text{රු } 10\,000 \times \frac{10}{100}$

= රු 1 000

පළමු අවුරුද්ද අවසානයේ මුළු මුදල = රු 10 000 + 1 000

= රු 11 000

දෙවන අවුරුද්ද සඳහා පොලිය $= \text{රු } 11\,000 \times \frac{10}{100}$

$= \text{රු } 1\,100$

දෙවන අවුරුද්ද අවසානයේ මුළු මුදල $= \text{රු } 11\,000 + 1\,100$

$= \text{රු } \underline{\underline{12\,100}}$

වැල් පොලී ක්‍රමයට පොලිය ඉහත පරිදි එක් එක් වසර සඳහා වෙන වෙන ම සොයා, ණය මුදලට එකතු කර, මුළු මුදල සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 2

අමල් රුපියල් 50 000ක් 6%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ වසර තුනක් සඳහා ස්ථිර තැන්පතුවක් ලෙස බැංකුවක ආයෝජනය කරයි. නිමල් රුපියල් 50 000ක් 6%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසර තුනක් අවසානයේ දී අමල්ට හා නිමල්ට හිමි වන මුළු මුදල් ප්‍රමාණය වෙන වෙන ම සොයන්න.

පළමුවැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{106}{100}$

$= \text{රු } 53\,000.00$

දෙවැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 53\,000 \times \frac{106}{100}$

$= \text{රු } 56\,180.00$

තුන්වැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 56\,180 \times \frac{106}{100}$

$= \text{රු } \underline{\underline{59\,550.80}}$

වසර 3 අවසානයේ නිමල්ට ලැබෙන මුළු පොලිය $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{6}{100} \times 3$

$= \text{රු } 9\,000.00$

වසර 3 අවසානයේ නිමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 9\,000 + 50\,000$

$= \text{රු } \underline{\underline{59\,000.00}}$

අමල්ට වසර 3 අවසානයේ ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100}$

$= \text{රු } 59\,550.80$

ලෙස ද ලබා ගත හැකි ය.

9.2 අභ්‍යාසය

1. අවුරුද්දට 5% බැගින් වූ වැල් පොලියට රුපියල් 5 000ක ණය මුදලක් ලබාගත් පුද්ගලයකු වසර 2කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කීය ද?

2. අවුරුද්දට 7% බැගින් වූ වැල් පොලියට රුපියල් 6 000ක් බැංකුවක තැන්පත් කළ පුද්ගලයකුට අවුරුදු 2කට පසු හිමි වන මුළු මුදල සොයන්න.

3. රාධා 12% බැගින් වූ වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 8 000ක් බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසරකට පසු බැංකු පොලී අනුපාතිකය 10% දක්වා පහළ වැටිණි නම්, වසර 2කට පසු රාධාට ලැබෙන මුළු පොලී මුදල ගණනය කරන්න.

4. හෂාන් හා කාසිම් මිතුරෝ දෙදෙනෙකි. හෂාන් රුපියල් 25 000ක මුදලක් 15% ක වාර්ෂික සුළු පොලියට ද කාසිම් රුපියල් 25 000ක මුදලක් 14%ක වාර්ෂික වැල් පොලියට ද එක ම දිනක දී ණයට දී ඇත් නම් වසර 3කට පසු වැඩි මුදලක් ලැබෙන්නේ කාට දැයි ගණනය කරන්න.

5. 12%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් ගෙවන බැංකුවක් සෑම මාස 6කට වරක් ම බැංකුවේ තැන්පත් මුදල් සඳහා පොලිය ගණනය කර එම පොලිය මුල් මුදලට එකතු කරනු ලැබේ. වසරක් ආරම්භයේ රුපියල් 40 000ක මුදලක් එම බැංකුවේ තැන්පත් කළ පුද්ගලයකුට වසරක් අවසානයේ හිමි වන මුළු මුදල කොපමණ ද?

6. 8%ක වාර්ෂික වැල් පොලියට යම්කිසි මුදලක් ණයට දී ඇති පුද්ගලයකුට දෙවන වසර අවසානයේ ලැබුණු පොලී මුදල රුපියල් 432ක් නම්, ණයට දී ඇති මුදල ගණනය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක විකුණුම් මිල රුපියල් 45 000කි. එක වර මුදල් ගෙවා රූපවාහිනී යන්ත්‍රය මිල දී ගන්නා අයකුට 6%ක වට්ටමක් හිමි වන අතර, වාරික ලෙස ගෙවීම සඳහා ලබා ගන්නා තැනැත්තෙකුට මුලින් රුපියල් 9 000ක් ගෙවා ඉතිරිය සමාන මාසික වාරික 12කින් ගෙවා නිම කළ හැකි ය. ණය මුදල් සඳහා හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට 24%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරේ.

(i) අත්පිට මුදලට රූපවාහිනිය මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කොපමණ ද?
(ii) ගෙවීමේ ක්‍රමයට මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කොපමණ ද?
(iii) අත්පිට මුදලට රූපවාහිනිය මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවීමේ ක්‍රමයට ලබා ගැනීමට වඩා කොපමණ වාසියක් හිමි වේ ද?

2. මිනිසෙක් 4.2% ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 100 000ක මුදලක් ණයට ගෙන එම මුදල 8% ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් ගෙවන බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසර 2කට පසු තැන්පත් මුදල ලබා ගෙන, ණය මුදල ගෙවා දමයි නම්, එම ආයෝජනයේ දී ඔහු ලැබූ ලාභය ගණනය කරන්න.

3. මිනිසෙක් එක්තරා වැල් පොලී අනුපාතිකයකට මුදලක් ණයට ගනියි. අවුරුදු 2කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට නම් රුපියල් 14 400ක් ද අවුරුදු 3කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීම සඳහා රුපියල් 17 280ක් ද ගෙවිය යුතු නම්, ණයට ගත් මුදල හා වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

10 කොටස් වෙළෙඳපොළ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

- කොටස් වෙළෙඳපොළ හා එහි ස්වභාවය හඳුනා ගැනීමට
- කොටස් වෙළෙඳපොළ ආශ්‍රිත විශේෂිත වචන හඳුනා ගැනීමට
- සමාගම්වල මුදල් ආයෝජනයෙන් ලැබෙන ලාභාංශ ගණනය කිරීමට
- කොටස් ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

හැඳින්වීම

අප රටේ පවත්වා ගෙන යන ව්‍යාපාර අතරින් 2007 අංක 7 දරණ සමාගම් පනත යටතේ ලියාපදිංචි වූ සමාගම් පිළිබඳ ව මෙම පාඩමේදී සලකා බැලේ. මෙම සමාගම්වල හිමිකාරිත්වය තනි පුද්ගලයකු හෝ පුද්ගලයන් කිහිපදෙනකු සතු විය හැකි ය. සීමාසහිත සමාගම්වල ස්වරූපය අනුව, ඒවා

- සීමාසහිත පෞද්ගලික සමාගම් හෝ
- සීමාසහිත පොදු සමාගම් ලෙස වර්ග කෙරී ඇත.

සීමාසහිත පොදු සමාගම්වලට සිය ව්‍යාපාර ආරම්භ කිරීමට හෝ පවත්වා ගෙන යෑමට අවශ්‍ය මූල්‍ය සම්පත් සපයා ගැනීම සඳහා මහජනතාව ද හවුල් කර ගත හැකි ය. මේ සඳහා අද ව්‍යාපාර ලෝකයේ පවතින ජනප්‍රිය ක්‍රමයක් වන්නේ විවෘත මාධ්‍ය නිවේදනයක් මගින් මහජනතාව වෙත, සමාගමේ කොටස් මිල දී ගන්නා ලෙස දන්වා සිටීමයි. මහජනතාව කොටස් මිල දී ගත් පසු, ඔවුන්ට තම කොටස් වෙනත් පුද්ගලයන්ට විකිණිය හැකි ය. එසේ කොටස් මිල දී ගැනීම හා විකිණීම සඳහා පහසුකම් සපයා ඇති ස්ථානය කොටස් වෙළෙඳපොළ ලෙස හැඳින්වේ.

කොටස් වෙළෙඳපොළ

"කොළඹ ව්‍යාපාර වස්තු හුවමාරුව" ලෙස ද හැඳින්වෙන කොටස් වෙළෙඳපොළ පාලනය වන්නේ ශ්‍රී ලංකා සුරැකුම්පත් හා විනිමය කොමිෂන් සභාව මගිනි. මෙම කොමිෂන් සභාව මගින් කොටස් වෙළෙඳපොළේ වැඩ කටයුතු සඳහා මග පෙන්වීම, මෙහෙයවීම හා නියාමනය කරනු ලබයි. කොටස් ගනුදෙනු සඳහා කොටස් වෙළෙඳපොළට ඇතුළත් වන සමාගම්, එම වෙළෙඳපොළේ ලියාපදිංචි වී, ලැයිස්තුගත සමාගම් ලෙස සමාගම් ලේඛනයට ඇතුළත් විය යුතු ය. 2015 වර්ෂයේ අප්‍රේල් 21 වන විට මෙසේ ලැයිස්තුගත සමාගම් ගණන 297ක් විය. එම සමාගම්වල කොටස් මිල දී ගැනීමේ දී හෝ විකිණීමේ දී ගනුදෙනුකරුවන්ට සහාය වීම පිණිස, තැරැව්කාර සමාගම් ද කොටස් වෙළෙඳපොළ

තුළ ක්‍රියාත්මක වේ. ගනුදෙනුකරුවන්ට, කොටස් වෙළෙඳපොළෙහි ගනුදෙනු සජීව අන්තර්ජාලය ඔස්සේ යාවත්කාලීන වන අතර, මහජනතාවට අන්තර්ජාලය ඔස්සේ ගනුදෙනු කිරීමේ පහසුකම් ද සපයා තිබේ.

10.1 කොටස්

ලැයිස්තුගත සීමාසහිත පොදු සමාගම් සිය ප්‍රාග්ධනය රැස් කර ගැනීමට මහජනතාව සම්බන්ධ කර ගන්නේ 'කොටස්' නමින් හැඳින්වෙන ඒකකය මගිනි. සමාගමේ ආරම්භක ප්‍රාග්ධනය, ඒකකයක් ලෙස සලකා එය සමාන කොටස්වලට හෙවත් පංගුවලට බෙදූ විට ඉන් එක් පංගුවක් එක් 'කොටසක්' ලෙස හැඳින්වේ.

යම් සමාගමක්, මුල් වරට සිය ආරම්භක කොටස් මහජනතාව වෙත නිකුත් කිරීමේ දී, එක් කොටසක් සඳහා මිලක් එම සමාගම විසින් ම නියම කරනු ලැබේ. එම මිලට, යම් ආයෝජකයකුට සමාගමේ කොටස් ඕනෑ ම ප්‍රමාණයක් මිල දී ගත හැකි ය. යම් සමාගමක කොටස් මිල දී ගත් ආයෝජකයකුට ඔහු ලබා ගත් කොටස් ප්‍රමාණයට සමානුපාතික ව එම සමාගමේ හිමිකාරිත්වය ලැබේ.

මේ පිළිබඳ තව දුරටත් අවබෝධ කර ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති නිදසුන සලකා බලන්න.

යම් සමාගමක් විසින් මහජනතාව සඳහා නිකුත් කරන ලද කොටස් 100 000කින් ආයෝජකයෙක් කොටස් 10 000ක් මිල දී ගනියි. එවිට ආයෝජකයාට සමාගමේ $\frac{10\,000}{100\,000}$ ක හිමිකාරිත්වයක් ලැබේ. එය ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වමු.

$$\frac{10\,000}{100\,000} \times 100\% \quad = 10\%$$

එමනිසා ආයෝජකයා සමාගමෙන් 10%ක හිමිකාරිත්වයක් ලබයි.

නිදසුන 1

C නමැති සමාගමක්, තම ප්‍රාග්ධනය ලෙස ඇති රුපියල් 10 000 000, එක් කොටසක් රුපියල් 100 බැගින් වන කොටස් 100 000කට වෙන් කොට මහජනතාව වෙත නිකුත් කරයි. විශ්වා එම සමාගමේ කොටස් 5000ක් මිල දී ගනියි.

(i) කොටස් මිල දී ගැනීම නිසා විශ්වා C සමාගමේ ලැබූ හිමිකාරිත්වය
  (a) භාගයක් ලෙස
  (b) ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(ii) විශ්වා C සමාගමෙහි ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.

(i) සමාගම නිකුත් කළ මුළු කොටස් ගණන = 100 000

විශ්වා මිල දී ගත් කොටස් ගණන = 5 000

(a) සමාගමේ, විශ්වාගේ හිමිකාරිත්වය භාගයක් ලෙස $= \frac{5\,000}{100000} = \frac{1}{20}$

(b) ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \frac{1}{20} \times 100\%$

$= \underline{\underline{5\%}}$

(ii) කොටසක මිල = රු 100

විශ්වා මිල දී ගත් කොටස් = 5 000

ආයෝජනය කළ මුදල = රු $100 \times 5\,000$

= $\underline{\underline{\text{රු } 500\,000}}$

කොටස් සඳහා ලාභාංශ

ලැයිස්තුගත සමාගම්, සිය ආරම්භක කොටස් නිකුත් කිරීමේ දී ම සමාගමේ ලාභයෙන් කොටස්කරුවන් සඳහා ප්‍රතිලාභ ලෙස නිකුත් කරන මුදල් ප්‍රමාණය නිවේදනය කරයි. එය එක් කොටසක් සඳහා ගෙවන මුදල මගින් දැක්වේ. එසේ ගෙවන මුදල් වාර්ෂික ව හෝ කාර්තු වශයෙන් හෝ ගෙවනු ලබන අතර, ඒවා 'ලාභාංශය' ලෙස හැඳින්වේ.

උදාහරණයක් ලෙස, සමාගමක් සිය කොටස්කරුවන් සඳහා කොටසකට රුපියල් 5ක වාර්ෂික ලාභාංශයක් ගෙවයි. මෙම ලාභාංශය, සමාගමේ තීරණය පරිදි වරින් වර වෙනස් කිරීමට හැකියාව පවතී. මෙය තවදුරටත් පැහැදිලි කර ගැනීම සඳහා නැවතත් ඉහත සැලකූ නිදසුන 1 සැලකිල්ලට ගනිමු.

නිදසුන 1

විශ්වා මිල දී ගත් රුපියල් 100යේ කොටස් 5 000 සඳහා C සමාගම එක් කොටසකට රුපියල් 4ක වාර්ෂික ලාභාංශයක් ගෙවයි.

(i) විශ්වා කොටස් ආයෝජනයෙන් ලබන වාර්ෂික ආදායම සොයන්න.

(ii) විශ්වාට ලැබෙන වාර්ෂික ආදායම, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(i) විශ්වා සතු කොටස් ගණන = 5000

කොටසක් සඳහා වාර්ෂික ලාභාංශය = රු 4

$\therefore$ විශ්වා ලබන වාර්ෂික ආදායම = රු 5000×4

= $\underline{\underline{\text{රු } 20\,000}}$

(ii) විශ්වා ආයෝජනය කළ මුදල $= රු\ 100 \times 5\,000$
$= රු\ 500\,000$

$\therefore$ ඔහුගේ වාර්ෂික ආදායම ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \frac{20\,000}{500\,000} \times 100\%$

$= \underline{\underline{4\,\%}}$

දැන් කොටස් ආයෝජනයේ මූලික අවස්ථාවට අදාළ කරුණු ඇතුළත් පහත අභ්‍යාසයන්හි යෙදෙන්න.

10.1 අභ්‍යාසය

1. ආයෝජකයෙක් සසිරි ඇඟලුම් සමාගමේ කොටසක් රුපියල් 25 බැගින්, කොටස් 1000ක් මිල දී ගත්තේ ය.

(i) ඔහු ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?

(ii) සමාගම වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවයි නම් ආයෝජකයාගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

2. පහත දැක්වෙන වගු සම්පූර්ණ කරන්න.

(i)

කොටසක මිල රුපියල්	කොටස් ගණන	ආයෝජනය කළ මුදල රුපියල්
10	2500	....
20	5000	....
....	500	50 000
....	4000	80 000
30	....	30 000
45	....	135 000

(ii)

කොටස් ගණන	වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට (රු)	වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රුපියල්
500	2	....
1000	3.50	....
....	5	5000
....	2.50	500 000
2000	....	8000
750	....	2250

3. සීමාසහිත පොදු සමාගමක් සිය ප්‍රාග්ධනය රැස් කර ගැනීම සඳහා කොටසක් රුපියල් 25ක් වූ කොටස් 10 000 000ක් මහජනතාව වෙත නිකුත් කරයි. එම කොටස් සඳහා වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට රුපියල් 5 කි. එම සමාගමේ ආයෝජනය සඳහා ඉදිරිපත් වන සුජීව, සමාගමේ කොටස් 50 000ක් මිල දී ගනියි.

(i) සමාගමේ ප්‍රාග්ධනය සොයන්න.

(ii) සුජීව සමාගමේ ආයෝජනය කරන මුදල සොයන්න.

(iii) කොටස් ආයෝජනයෙන් සුජීවට වාර්ෂික ව ලැබෙන ලාභාංශය සොයන්න.

(iv) සුජීවගේ වාර්ෂික ලාභාංශය ඔහු යෙදූ මුදලෙන් කවර ප්‍රතිශතයක් ද?

4. වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට රුපියල් 3 බැගින් ගෙවන සමාගමක යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක් රුපියල් 20 බැගින් මහේල මිල දී ගත්තේ ය. ඔහු එම ආයෝජනයෙන් වර්ෂය අවසානයේ දී රුපියල් 12 000ක ලාභාංශ ආදායමක් ලැබී ය.

(i) සමාගමේ මහේල සතු කොටස් ගණන සොයන්න.

(ii) කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා මහේල ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.

5. ගනේෂ් තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 100 000ක මුදලින් හරි අඩක්, වාර්ෂික ව කොටසකට රුපියල් 4 බැගින් ගෙවන එක්තරා සමාගමක රුපියල් 25 කොටස් යම් ප්‍රමාණයක් මිල දී ගැනීමටත්, ඉතිරි අඩ වාර්ෂික ව 12%ක පොලියක් ගෙවන මූල්‍ය ආයතනයක තැන්පත් කිරීමටත් තීරණය කළේ ය. වසරකට පසු ගනේෂ්ට වඩා වාසිදායක කුමන ආයෝජනය දැයි හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

10.2 කොටස් වෙළෙඳපොළ ගනුදෙනු

තම කොටස් ගනුදෙනු සඳහා කොටස් වෙළෙඳපොළට ඇතුළත් වීමට අවස්ථාව ලැබෙන්නේ එහි ලැයිස්තුගත සමාගම්වලට පමණක් බව අපි දනිමු. එවැනි සමාගමක් ආරම්භයේදී ම මහජනතව වෙත කොටස් නිකුත් කිරීමෙන් පසු සිදු වන කොටස් ගනුදෙනු පිළිබඳ ව හැදෑරීමට පහත සටහනට අවධානය යොමු කරන්න.

සීමාසහිත නෙත්මි සමාගම, කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් වාර්ෂික ව ලාභාංශ ගෙවන කොටස් 100 000ක් එක් කොටසක් රුපියල් 10ක් වූ ආරම්භක හඳුන්වා දීමේ මිලකට මහජනතාව වෙත නිකුත් කළේ ය. වර්ෂයකට පසු මෙම සමාගමේ කොටසක මිල කොටස් වෙළෙඳපොළේ රුපියල් 20 තෙක් ඉහළ නැග තිබිණි. එම අවස්ථාවේ නදීශා ඉහත සමාගමේ කොටස් 1000ක් මිල දී ගත්තා ය. වර්ෂ කිහිපයකට පසු එම සමාගමේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 28ක් තෙක් ඉහළ නැගි අවස්ථාවේ දී ඇය තමා සතු කොටස් 1000 ම විකුණුවා ය.

යම් සමාගමක කොටස් හඳුන්වා දීමේ ආරම්භක මිල යටතේ ආයෝජකයන්ට කොටස් මිල දී ගැනීම සිදු වන අවස්ථාව කොටස් වෙළෙඳපොළේ **"ප්‍රාථමික වෙළෙඳපොළ"** ලෙස හැඳින්වේ. ප්‍රාථමික වෙළෙඳපොළේ දී ආයෝජකයන්ට හැකි වන්නේ කොටස් මිල දී ගැනීම පමණි. එහෙත් ඊට පසු ව කොටස් ගනුදෙනුවට ඉඩ ලබා දෙමින් කොටසක් සඳහා ඇති ඉල්ලුම අනුව කොටස සඳහා අලුත් මිලක් ඇති විය හැකි ය. එම මිල එම අවස්ථාවේ **වෙළෙඳපොළ මිල** ලෙස හැඳින්වේ. මෙම අවස්ථාව කොටස් වෙළෙඳපොළේ **"ද්විතියික වෙළෙඳපොළ"** ලෙස හැඳින්වේ. ඉහත නෙත්මි සමාගමේ කොටසක මිල රුපියල් 20 තෙක් ඉහළ නැඟ, නැවතත් වසර කිහිපයකින් රුපියල් 28 තෙක් වැඩි විය. මේ ආකාරයට කොටසක වෙළෙඳපොළ මිලේ අඩු වැඩි වීම ද්විතීයික වෙළෙඳපොළේ දී සිදු වේ. එම අවස්ථාවේ දී ආයෝජකයන්ට තමා සතු කොටස් විකිණීමට හෝ අලුත් කොටස් මිල දී ගැනීමට හෝ හැකි ය.

ප්‍රාග්ධන ලාභය

සමාගමක කොටස් එහි හඳුන්වා දීමේ මිලට හෝ වෙළෙඳපොළ මිලට හෝ මිල දී ගත් විට එම මිල **කොටසක ගැණුම් මිල** ලෙසත් එම කොටස්, වෙළෙඳපොළ මිලට විකුණනු ලබන මිල **කොටසක විකුණුම්** මිල ලෙසත් හැඳින්වේ.

ආයෝජකයකු කොටස් විකිණීමේ දී ලාභයක් හෝ අලාභයක් සිදු විය හැකි ය. තමා සතු කොටස් විකිණීමේ දී,

විකුණුම් මිල > ගැණුම් මිල නම්, එවිට ප්‍රාග්ධන ලාභයක් ලැබෙන අතර,

ප්‍රාග්ධන ලාභය = කොටස්වල විකුණුම් මිල – කොටස්වල ගැනුම් මිල

ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

එසේ ම,

විකුණුම් මිල < ගැනුම් මිල නම්, ප්‍රාග්ධන අලාභයක් සිදු වන අතර,

ප්‍රාග්ධන අලාභය = කොටස්වල ගැනුම් මිල – කොටස්වල විකුණුම් මිල

ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

නිදසුන 1

කොටස් වෙළෙඳපොළ සමග සම්බන්ධ ආයෝජකයකු වන පෙරේරා මහතා එක්තරා සමාගමක කොටස් 2000ක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් ව පැවති අවස්ථාවේ දී මිල දී ගත්තේ ය. එම සමාගමේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25 තෙක් ඉහළ නැගි අවස්ථාවක ඔහු තමා සතු එම සමාගමේ කොටස් සියල්ල විකුණා දැමී ය. පෙරේරා මහතා,

(i) සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ඔහු ලත් මුදල සොයන්න.
(iii) ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(iv) ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(i) සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල $= \text{රු } 20 \times 2\ 000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 40\ 000}}$

(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ලැබෙන මුදල $= \text{රු } 25 \times 2\ 000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 50\ 000}}$

(iii) ප්‍රාග්ධන ලාභය $= \text{රු } 50\ 000 - 40\ 000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 10\ 000}}$

(iv) ප්‍රාග්ධන ලාභය ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{10\ 000}{40\ 000} \times 100\%$

$= \underline{\underline{25\%}}$

ඉහත (iv) හි සඳහන් ප්‍රාග්ධන ලාභ ප්‍රතිශතය කොටසක මිල ඇසුරෙන් ද ලබා ගත හැකි ය.

කොටසක ගැණුම් මිල = රු 20
කොටසක විකුණුම් මිල = රු 25

$\therefore$ ප්‍රාග්ධන ලාභය ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{25 - 20}{20} \times 100\%$

$= \dfrac{5}{20} \times 100\%$

$= \underline{\underline{25\%}}$

නිදසුන 2

මොහොමඩ් මහතා තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 96 000ක මුදලකින් යම් ප්‍රමාණයක්, වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන A නම් සමාගමේ යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 18 බැගින් මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. ඉතිරි කොටස වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රුපියල් 3.50 බැගින් ගෙවන B නම් සමාගමේ යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 21 බැගින් මිලදී ගැනීමට යෙදවී ය. වර්ෂයක් අවසානයේ A නම් සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස ලැබූ මුදලට වඩා රුපියල් 1000ක් වැඩියෙන් B සමාගමෙන් ලාභාංශ ලෙස ඔහුට ලැබිණි.

(i) මොහොමඩ් මහතා, A සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල x ලෙස ගෙන, x ඇතුළත් සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඉහත ලබා ගත් සමීකරණය විසඳා, ඔහු එක් එක් සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(iii) සමාගම් දෙකේ ඔහුට තිබූ කොටස් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.
(iv) එක් එක් සමාගමෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

වාර්ෂික ආදායම ලැබීමෙන් පසු මොහොමඩ් මහතා සමාගම් දෙකේ ම ඔහු සතු සියලු කොටස් එවකට සමාගම් දෙකේ ම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල වූ රුපියල් 20 බැගින් විකුණා දැමී ය.

(v) සමාගම් දෙකේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුළු මුදල සොයන්න.

(vi) සමාගම් දෙකේ ම ආයෝජනයෙන් වර්ෂය අවසානයේ ලැබෙන ලාභාංශ ආදායමේත් ප්‍රාග්ධන ලාභයේත් එකතුව යෙදූ මුදලින් 20%ක් විය යුතු බවට වූ මොහොමඩ් මහතාගේ බලාපොරොත්තුව ඉටු නොවූ බව පෙන්වන්න.

(i) A සමාගමෙන් ගත් කොටස් ගණන $= \frac{x}{18}$

A සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $\frac{x}{18} \times 2 = \frac{x}{9}$

එලෙස ම,

B සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $\frac{(96\,000 - x)}{21} \times 3.50$

$=$ රු $\frac{(96\,000 - x)}{21} \times \frac{7}{2}$

$=$ රු $\frac{(96\,000 - x)}{6}$

$\therefore \quad \frac{(96\,000 - x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$ යනු අවශ්‍ය සමීකරණය යි.

(ii)
$$\frac{(96\,000 - x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$$
$$18 \times \frac{(96\,000 - x)}{6} - 18 \times \frac{x}{9} = 18 \times 1000$$
$$3\,(96\,000 - x\,) - 2x = 18\,000$$
$$288\,000 - 3x - 2x = 18\,000$$
$$288\,000 - 18\,000 = 5x$$
$$270\,000 = 5x$$
$$x = 54\,000$$

$\therefore$ A සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල රු 54 000 වේ.

B සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල = රු 96 000 – 54 000 = රු $\underline{\underline{42\ 000}}$

(iii) A සමාගමේ හිමි ව තිබූ කොටස් ගණන $= \dfrac{54\,000}{18} = \underline{\underline{3000}}$

B සමාගමේ හිමි ව තිබූ කොටස් ගණන $= \dfrac{42\,000}{21} = \underline{\underline{2000}}$

(iv) A සමාගමේ ආයෝජනයෙන් ලැබූ ආදායම = රු $3000 \times 2 =$ $\underline{\underline{\text{රු } 6000}}$

B සමාගමේ ආයෝජනයෙන් ලැබූ ආදායම = රු $2000 \times 3.50 =$ $\underline{\underline{\text{රු } 7000}}$

(v) A සමාගමේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල = රු $3000 \times 20 = \underline{\underline{60\ 000}}$

B සමාගමේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල = රු $2000 \times 20 = \underline{\underline{40\ 000}}$

∴ සමාගම් දෙකේ ම කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුළු මුදල = රු 60 000 + 40 000
= රු 100 000

සමාගම් දෙකෙන් ම ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම = රු 6000 + 7000
= රු 13 000

∴ වර්ෂ අවසානයේ ලාභාංශ ආදායම් හා කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදලේ එකතුව } = රු 100 000 + 13 000
= රු 113 000

සමාගම් දෙකේ කොටස් ආයෝජනයට යෙදූ මුදල = රු 96 000
ලැබූ ලාභය = රු 113 000 – 96 000
= රු 17 000

∴ මුදල් ආයෝජනයෙන් ලැබූ ලාභය යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස } $= \dfrac{17\ 000}{96\ 000} \times 100\%$
$= 17.7\%$

$17.7\% < 20\%$ නිසා මොහොමඩ් මහතාගේ බලාපොරොත්තුව ඉටු වී නැත.

10.2 අභ්‍යාසය

1. වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ආයෝජනය කරන මුදල (රුපියල්)	කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල (රුපියල්)	කොටස් ගණන	කොටසකට රුපියල් 3 බැගින් වාර්ෂික ආදායම (රුපියල්) (ලාභාංශය)
50 000	25	....	....
....	40	....	1500
75 000	....	....	3000
....	15	500	....
120 000	....	2000	....

2. වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට තරිඳු රුපියල් 60 000ක් යෙදවී ය.

(i) තරිඳු මිල දී ගත් කොටස් ගණන සොයන්න.
(ii) කොටස් ආයෝජනයෙන් තරිඳු ලබන වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iii) වාර්ෂික ලාභාංශ, යෙදූ මුදලින් කවර ප්‍රතිශතයක් දැයි සොයන්න.

3. රමේෂ් එක්තරා සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් ව තිබිය දී කොටස් 5000ක් මිල දී ගත්තේ ය. එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 50ක් වූ අවස්ථාවේ දී සමාගමේ ඔහු සතු ව තිබූ කොටස් සියල්ල විකුණන ලදි.

(i) කොටස් විකිණීමේ දී රමේෂ් එක් කොටසකින් ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(ii) කොටස් සියල්ල විකිණීමෙන් ලබන ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(iii) ප්‍රාග්ධන ලාභය, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස සොයන්න.

4. ව්‍යාපාරිකයෙක් කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ එක්තරා සමාගමක කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා රුපියල් 40 000ක් ආයෝජනය කළ අතර, වර්ෂයකට පසු ඔහු යෙදූ මුදලින් 10%ක් ලාභාංශ ලෙස ලබා ගත්තේ ය. එම ආදායම ලබා ගැනීමෙන් පසු කොටසක් රුපියල් 50 බැගින් කොටස් සියල්ල විකුණා දමන ලදි.

(i) ව්‍යාපාරිකයා සමාගමෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශය සොයන්න.
(ii) සමාගම කොටසක් සඳහා වාර්ෂික ව ගෙවූ ලාභාංශය සොයන්න.
(iii) ව්‍යාපාරිකයා කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල සොයන්න.
(iv) ව්‍යාපාරිකයාට ලැබෙන ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(v) ව්‍යාපාරිකයාගේ ප්‍රාග්ධන ලාභය, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

5. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් වූ සමාගමක කොටස් මිල දී ගත් පුද්ගලයෙක් කොටස්වල වෙළෙඳපොළ මිල වැඩි වූ අවස්ථාවක තමා සතු කොටස් සියල්ල විකුණා දැමී ය. ඉන් ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය යෙදූ මුදලින් 80%ක් විය.
(i) එක් කොටසකින් ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය කීය ද?
(ii) කොටසක් විකුණන ලද්දේ කීය බැගින් ද?

6. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 24ක් වූ සමාගමක, කොටස් මිල දී ගත් කෙනෙකු ආදායම් ලැබීමෙන් පසු එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ අවස්ථාවක විකිණීමෙන් ලැබෙන ප්‍රාග්ධන ලාභය යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

7. වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 6ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ කොටස් 1000ක් හිමි ආයෝජකයෙක් එම කොටස්වලින් එක් වර්ෂයක ලාභාංශ ආදායම් ලැබීමෙන් පසු ඒවායෙ වෙළෙඳපොළ මිල වැඩි වූ අවස්ථාවක විකුණා දැමී ය. කොටස් විකිණීමෙන් හා ලාභාංශයෙන් ඔහු ලැබූ මුළු ආදායම රුපියල් 71 000ක් විය.
(i) කොටස් ආයෝජනයෙන් වර්ෂයකට ලැබූ ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
(ii) ඔහු කොටසක් විකුණන්නට ඇත්තේ කීය බැගින් ද?
(iii) ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.

8. දේවින්ද තමා සතු මුදලින් හරි අඩක් වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 4 බැගින් ගෙවනු ලබන හා කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20 බැගින් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට යෙදවීය. ඉතිරිය වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 5 බැගින් ගෙවනු ලබන හා වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25 බැගින් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. එම ආයෝජන දෙකෙන් ම ඔහු ලැබූ ආදායම යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න. (ඉඟිය: එක් එක් කොටස් ප්‍රමාණ මිල දී ගැනීමට යෙද වූ මුදල රු x ලෙස ගන්න)

9. ආයෝජකයෙක් තමා ළඟ තිබූ රුපියල් 70 000ක මුදලින් කොටසක් වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 3ක් ගෙවනු ලබන සමාගමක යෙදවී ය. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ කොටස් ද ඉතිරි කොටස වාර්ෂික ලාභාංශ රුපියල් 4ක් ගෙවනු ලබන සමාගමක, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් වූ කොටස් ද මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. මෙම ආයෝජනයෙන් ඔහු වර්ෂයකට ලැබූ ආදායම රුපියල් 9500ක් වූයේ නම්, ඔහු එක් එක් සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල් වෙන වෙන ම සොයන්න.

10. වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 5ක් ගෙවන සමාගමක කොටස් 4000ක් හිමි ව තිබූ ආයෝජකයකු, එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 45 වූ අවස්ථාවේ ඒවා විකුණා දැමී ය. කොටස් විකිණීමෙන් ලද මුදල සම්පූර්ණයෙන් ම වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25ක් වූ වෙනත් සමාගමක කොටස් මිල දී ගත්තේ ය. එම ආයෝජනය නිසා ඔහුගේ ආදායම මුලින් ලැබූ ආදායමට වඩා රුපියල් 8800කින් වැඩි විය. දෙවන සමාගමේ කොටසක් සඳහා ගෙවන වාර්ෂික ලාභාංශය සොයන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. මල්කි තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 50 000ක මුදලක් ස්ථාවර තැන්පතු සඳහා වර්ෂයකට 12%ක් ගෙවන මූල්‍ය ආයතනයක වර්ෂයක කාලයක් සඳහා තැන්පත් කළා ය. වර්ෂය අවසානයේ මූල්‍ය ආයතනයෙන් එම මුදල නිදහස් කර ගත් ඇය, අවුරුද්දට ලැබූ පොලියත් සමඟ මුළු මුදල ම වර්ෂයකට කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවන, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 28ක් වන සමාගමක ආයෝජනය කළා ය.

(i) මූල්‍ය ආයතනයේ ස්ථාවර තැන්පතුව සඳහා ලැබූ පොලිය සොයන්න.
(ii) කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(iii) ආයෝජනයෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iv) දෙවන වර්ෂය සඳහා වඩා වාසිදායක වන්නේ, පොලියත් සමඟ මුළු මුදල ම නැවත මූල්‍ය ආයතනයේ තැන්පත් කිරීම ද? සමාගමේ ආයෝජනය කිරීම දැයි හේතු සහිත ව දක්වන්න.

2. වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන සමාගමක කොටස් 1 500ක් හිමි ආයෝජකයෙක්, එම කොටස් වර්ෂයක ආදායම ලැබීමෙන් පසු කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 32 වූ අවස්ථාවේ විකුණුවේ ය. කොටස් විකිණීමෙන් ලද මුදල, වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ සමාගමක කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. පළමු සමාගමේ හා දෙවන සමාගමේ ආදායම අතර අනුපාතය 5 : 4 බව පෙන්වන්න.

3. උදේශ් 12% සුළු පොලියට රුපියල් 40 000ක් මූල්‍ය ආයතනයකින් ණයට ගනියි. ඔහු එම මුදල සම්පූර්ණයෙන් ම වාර්ෂික ව කොටසකට ලාභාංශ රුපියල් 4.50ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20 වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. වසර තුනකට පසු ඔහු සතු කොටස් සියල්ල එවකට පැවැති වෙළෙඳපොළ මිල වූ රුපියල් 28 බැගින් විකුණා දමා මූල්‍ය ආයතනයෙන් ලබා ගත් ණය මුදල පොලියත් සමඟ සම්පූර්ණයෙන් ගෙවා නිම කළේ ය. මෙම ගනුදෙනුව නිසා, උදේශ්ට රුපියල් 28 600ක ලාභයක් ලැබුණු බව පෙන්වන්න.

4. එක්තරා සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 48ක් ව තිබිය දී උපුල් එම සමාගමේ මුදල් ආයෝජනය කළේ ය. වර්ෂ කිහිපයක් ආදායම ලැබීමෙන් පසු ඔහු, තමා සතු කොටස් 30%ක ප්‍රාග්ධන ලාභයක් ලැබෙන සේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල ඉහළ නැගි අවස්ථාවක විකිණීමට අදහස් කරයි. ඔහුගේ අපේක්ෂාව සාර්ථක වීමට කොටසක් විකිණිය යුත්තේ කීයට ද?

11 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

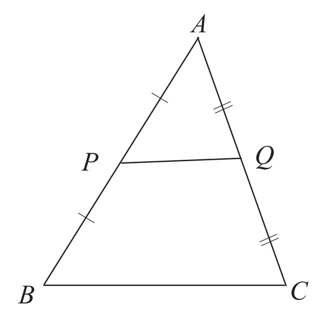
මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය අවබෝධ කර ගැනීමට
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය භාවිතයෙන් විවිධ ගණනය කිරීමට හා අනුමේය සාධනය කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

11.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග ආශ්‍රිත ප්‍රතිඵලයක්, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන් ලබා දෙයි. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයෙහි AB පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AC පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද ලෙස ගෙන ඇත.



එවිට,

$AP = PB$ ද $AQ = QC$ ද වේ. එය,

$AP = PB = \frac{1}{2}AB$ හා $AQ = QC = \frac{1}{2}AC$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

PQ රේඛා ඛණ්ඩයෙන් දැක්වෙන්නේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන රේඛා ඛණ්ඩය යි.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර, දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.

ඉහත රූපසටහනට අදාළ ව, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PQ // BC$ හා

$PQ = \frac{1}{2}BC$ වේ.

මෙම ප්‍රමේයය ඒත්තු ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙමු.

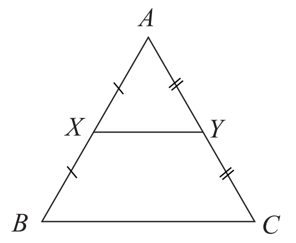
ක්‍රියාකාරකම 1

$AB = 6$ cm ද $BC = 7$ cm ද $CA = 8$ cm ද වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය ඇඳ, AB හි හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

(i) PQ හි දිග මැන, එය BC හි දිගෙන් හරි අඩක් බව තහවුරු කර ගන්න.
(ii) විහිත චතුරස්‍රය ආධාරයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ PQ හා BC සමාන්තර දැයි විමසා බලන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PQ = \frac{1}{2}BC$ බව ද $PQ//BC$ බව ද ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් ඇතුළත් නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන්නේ පාදයක දිග 12 cm වූ ABC නම් සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ.

(i) XY හි දිග
(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

සොයන්න.

(i) මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව
$XY//BC$ හා $XY = \frac{1}{2}BC$ වේ.

$$\therefore XY = \frac{1}{2} \times 12$$
$$= 6$$

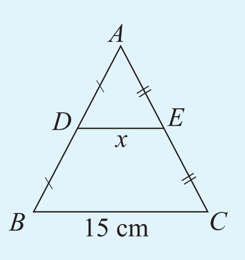
$\therefore XY$ හි දිග 6 cm වේ.

(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= BC + CY + XY + XB$
$= 12 + 6 + 6 + 6$
$= 30$

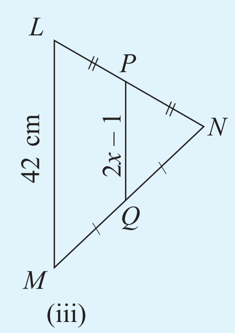
$\therefore BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

11.1 අභ්‍යාසය

1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.



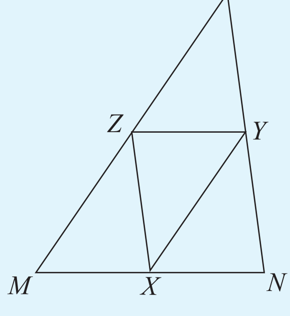
(i)



(ii)

(iii)

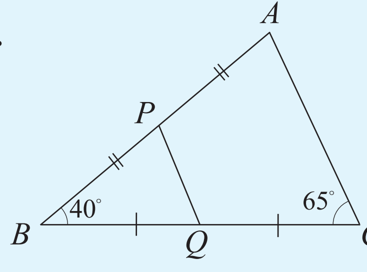
2.



දී ඇති රූපයේ X, Y හා Z යනු MN, NL හා LM පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. $MN = 8$ cm, $NL = 10$ cm හා $LM = 12$ cm නම්, XYZ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

3. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC හා BD විකර්ණ පිළිවෙළින් 15 cm හා 10 cm වේ. AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

4.

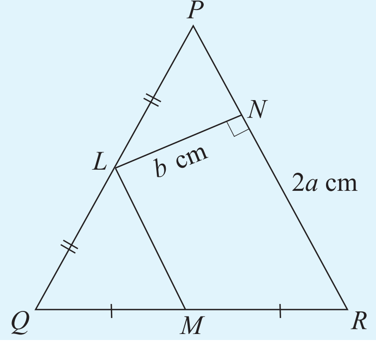


රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $AB = 8$ cm ද $BC = 10$ cm ද ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 24 cm ද වේ නම්, PBQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

(ii) $\hat{B} = 40^\circ$ ද $\hat{C} = 65^\circ$ ද නම් $PQCA$ චතුරස්‍රයේ ඉතිරි කෝණවල අගය සොයන්න.

5.



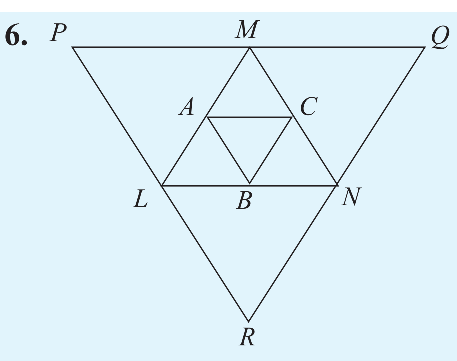
රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ QR හා QP පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා L වේ. $QR + QP = 16$ cm ද $PR = 2a$ cm හා $LN = b$ cm ද $L\hat{N}R = 90^\circ$ බව ද දී ඇත.

(i) $LMRP$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය a ඇසුරෙන්

(ii) $LMRP$ හි වර්ගඵලය a හා b ඇසුරෙන්

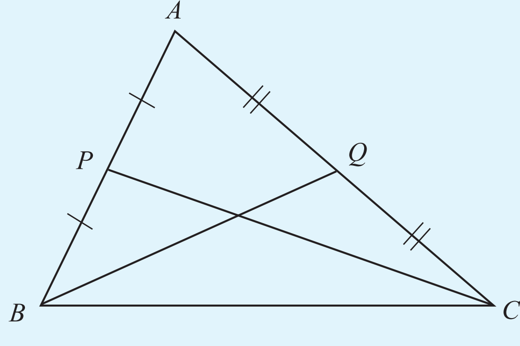
සොයන්න.

6.



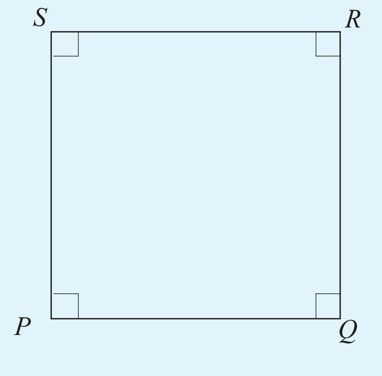
රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන M, N හා L යා කිරීමෙන් LMN ත්‍රිකෝණය ද එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන C, B, A යා කිරීමෙන් CBA ත්‍රිකෝණය ද ලබා ගෙන ඇත. PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 12 cm වේ නම්, ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

7.



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ නම් PBC හා BQC ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලය සමාන බව පෙන්වන්න.

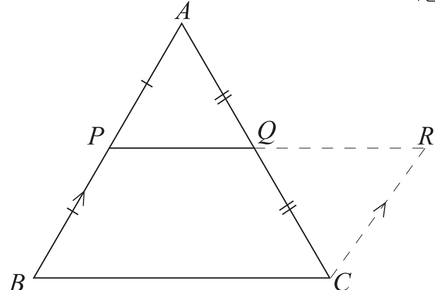
8.



රූපයේ දැක්වෙන $PQRS$ සමචතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 60 cm වේ. එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයා, කරණී ආකාරයෙන් තබන්න.

11.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය සාධනය

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.



දත්තය: ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $PQ//BC$ බව හා

$PQ = \frac{1}{2} BC$ බව

නිර්මාණය: දික්කළ PQට R හි දී හමු වන සේ BPට සමාන්තර ව C හරහා රේඛාවක් ඇඳීම.

සාධනය: APQ සහ QCR ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$AQ = QC$ (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q නිසා)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP//RC$ නිසා ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore APQ\,\Delta \equiv QCR\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

$\therefore AP = RC$ සහ $PQ = QR$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

නමුත් $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

මේ අනුව, $BCRP$ චතුරස්‍රයේ $PB = RC$ සහ $PB//RC$

$\therefore BCRP$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore PR = BC$ සහ $PR//BC$ වේ.

නමුත් $PQ = QR$

$\therefore PQ = \frac{1}{2} PR$

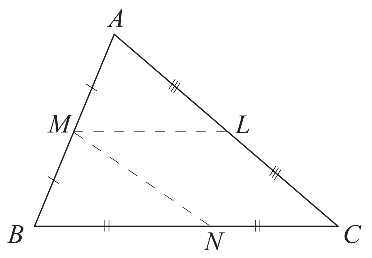
$= \frac{1}{2} BC$ ($PR = BC$ නිසා)

$\therefore PQ//BC$ සහ $PQ = \frac{1}{2} BC$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ *AB, BC* හා *CA* පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් *M, N* හා *L* වේ. *NCLM* සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව $ML = \frac{1}{2}BC$

$= NC$ (*N* යනු *BC* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා)

$ML // BC$ වේ.

එමනිසා, *NCLM* චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන හා සමාන්තර වේ. එමනිසා, *NCLM* යනු සමාන්තරාස්‍රයකි.

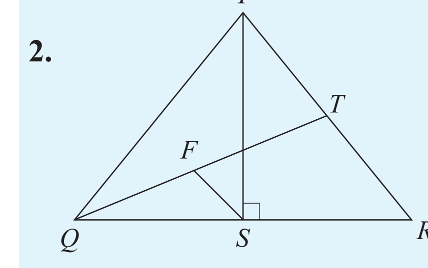
11.2 අභ්‍යාසය

1. *P* යනු *ABC* ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වේ. *AP, BP* හා *CP* රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් හා *Z, X* හා *Y* වේ.

(i) $B\hat{A}C = X\hat{Z}Y$, $A\hat{C}B = Z\hat{Y}X$ හා $C\hat{B}A = Y\hat{X}Z$ බව පෙන්වන්න.

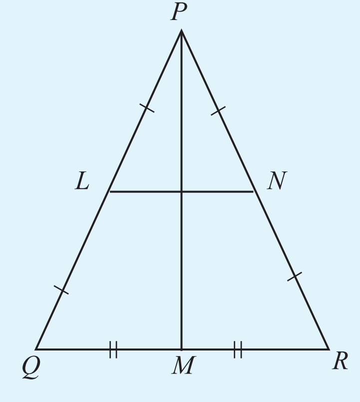
(ii) *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය *XYZ* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

2.



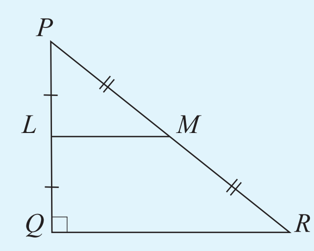
රූපයේ දැක්වෙන *PQR* ත්‍රිකෝණයේ $Q\hat{P}R$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට *QR* පාදය *S* හි දී හමු වන්නේ $PS \perp QR$ වන පරිදිය. *QT* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය *F* වේ. $FS // TR$ බව පෙන්වන්න.

3.



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව, $PM \perp LN$ බව පෙන්වන්න.

4.

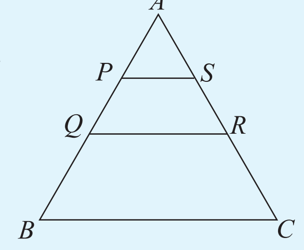


රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,

(i) $PLM\,\Delta \equiv QLM\,\Delta$ බව

(ii) $LQRM$ හි වර්ගඵලය $= \dfrac{3}{4}\, PQR\,\Delta$ වර්ගඵලය බව පෙන්වන්න.

5.



දී ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් Q හා R වේ. AQ හා AR රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා S වේ. $4\ PS = BC$ බව පෙන්වන්න.

6.

(i) ඕනෑ ම චතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) ඕනෑ ම සෘජුකෝණාස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය රොම්බසයක් බව සාධනය කරන්න.

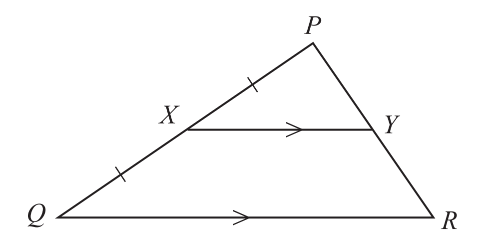
(iii) ඕනෑ ම සමචතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමචතුරස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(iv) ඕනෑ ම රොම්බසයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් සෑදෙන චතුරස්‍රය සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

11.3 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙහි විලෝමය පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.



රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයෙහි X යනු PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි (එනම් $PX = XQ$ වේ). $XY \,//\, QR$ වන ලෙස XY ඇඳ ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව Y යනු PR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. එනම්,

$$PY = YR \text{ වේ.}$$

මෙම ප්‍රමේයය තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 2

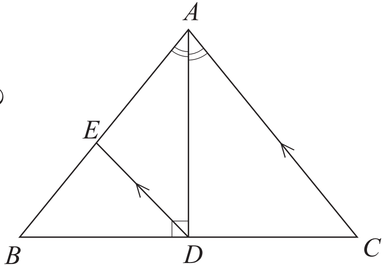
- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm හා $RP = 7$ cm වන පරිදි PQR ත්‍රිකෝණය අඳින්න.
- PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X ලෙස ලකුණු කරන්න.
- X හරහා QRට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව PR පාදය හමු වන ලක්ෂ්‍යය Y ලෙස නම් කරන්න.
- PY හා YR දිග මැන PY හා YR දිග අතර ඇති සම්බන්ධය ලියන්න.
- මෙලෙස X හරහා PR පාදයට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව QR පාදය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය Z ලෙස නම් කරන්න. QZ හා ZR දිග මනින්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PY = YR$ ද $QZ = ZR$ ද බව ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. එනම් ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වන පාදය සමච්ඡේද වන බව ඔබට තහවුරු වන්නට ඇත.

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයේ යෙදීම් කිහිපයක් නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ. $A\hat{D}B = 90^\circ$ වේ. D හරහා CAට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව AB පාදය E හි දී හමු වේ.



(i) $ADB \Delta \equiv ADC \Delta$ බව

(ii) $BE = EA$ බව

පෙන්වන්න.

(i) ADB සහ ADC ත්‍රිකෝණවල

$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ($B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකය AD නිසා)

AD පොදු පාදය වේ.

$A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ($AD \perp BC$)

$\therefore \; ABD \Delta \equiv ADC \Delta$ (කෝ.කෝ.පා)

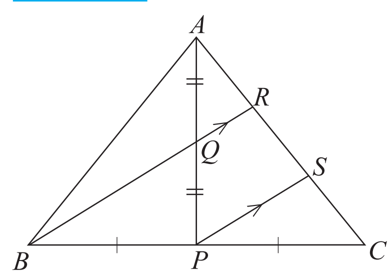
(ii) $BD = DC$ (ADB හා ADC අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$BD = DC$ හා $AC // DE$ බැවින්

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව BAC ත්‍රිකෝණයෙහි

$\underline{\underline{BE = EA}}$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AP රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද වේ. දික්කළ BQ රේඛාවට AC පාදය R හි දී හමු වේ. BRට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට AC පාදය S හි දී හමු වේ. $AC = 15$ cm වේ නම්, AS දිග සොයන්න.

APS ත්‍රිකෝණයේ $AQ = QP$ ද $QR//PS$ වේ.

එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$AR = RS$ ——— ①

BRC ත්‍රිකෝණයේ $BP = PC$ ද $BR//PS$ ද වේ.

එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$RS = SC$ ——— ②

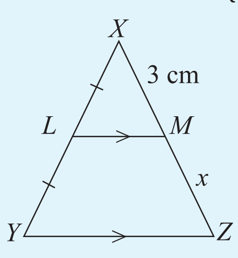
① හා ② ට අනුව $AR = RS = SC$ වේ.

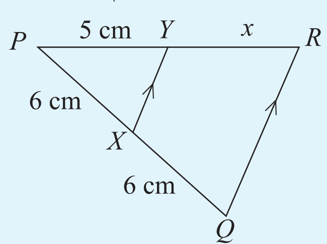
$$\therefore \; AS = \frac{2}{3} AC$$
$$= \frac{2}{3} \times 15$$
$$= 10$$

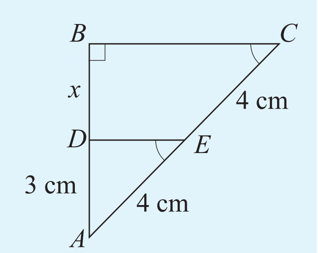
එමනිසා, AS හි දිග 10 cm වේ.

11.3 අභ්‍යාසය

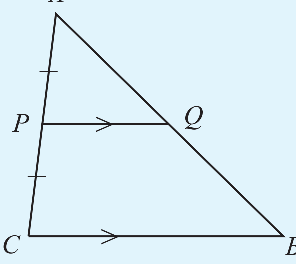
1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.





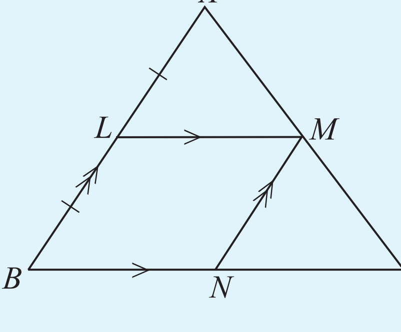


2.



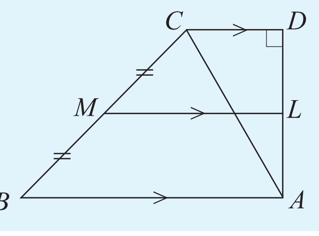
AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද $BC = 12$ cm, $AB = 15$ cm ද $PQ//CB$ ද වේ නම්,
(i) QB දිග
(ii) PQ දිග
සොයන්න.

3.



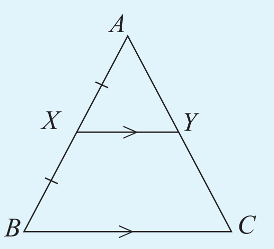
රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර $LM//BC$ ද $MN//AB$ ද වේ. $AB = 10$ cm ද $AM = 7$ cm ද $BC = 12$ cm ද නම් MC දිග හා $BNML$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

4.



රූප සටහනෙහි දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AC = 10$ cm හා $AD = 8$ cm නම්
(i) DC දිගත්
(ii) $ML = 10$ cm නම් $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයත්
සොයන්න.

5.

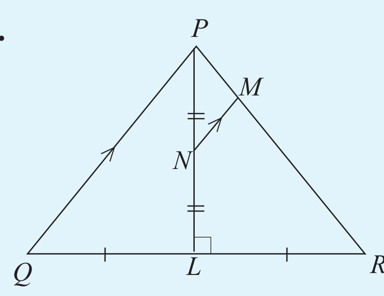


රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය සොයන්න.

6.

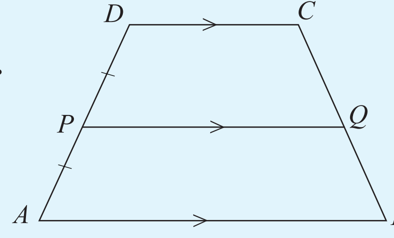
රූපයේ දැක්වෙන ABC හා ADC ත්‍රිකෝණ, සමපාද ත්‍රිකෝණ වන අතර $AB = 20$ cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $PQRDCB$ කොටසේ පරිමිතිය සොයන්න.

7.



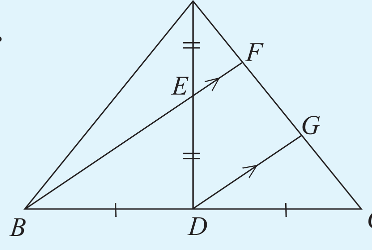
රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් $PQ = 20$ cm නම් MN දිග සොයන්න.

8.



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් PQ හි දිග AB හා DCහි දිග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

9.

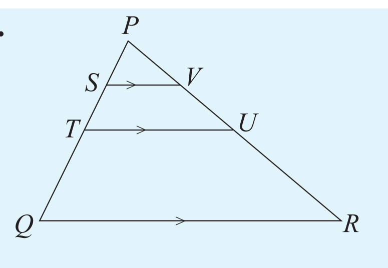


රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග x cm ද $EF = y$ cm ද ලෙස ගෙන ලකුණු කර ඇති තොරතුරු අනුව

(i) $EDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය
(ii) $BDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය
(iii) $BDGA$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

x හා y ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

10.

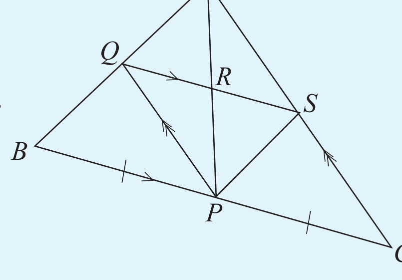


දී ඇති රූපයේ PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T ද PT හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S ද වේ. S හා T හරහා QRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛා PR පාද පිළිවෙළින් V හා U හි දී හමු වේ.

(i) $PV = \frac{1}{4} PR$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $SV : QR$ සොයන්න.

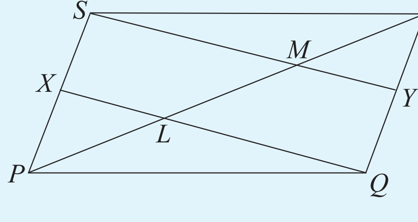
11.



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AR = RP$ බවත් $PS // BQ$ බවත් පෙන්වන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1.



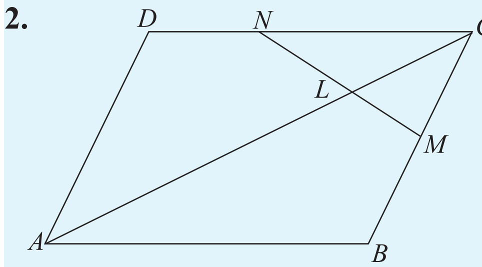
$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ PS හා QR පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. XQ හා SY රේඛා පිළිවෙළින් L හා M හි දී PR විකර්ණය හමු වේ.

(i) $XQYS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

(ii) $PM = \frac{2}{3} PR$ බව

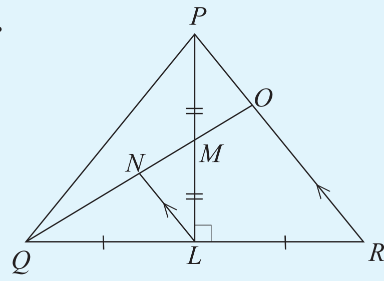
සාධනය කරන්න.

2.



$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC හා CD පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා N වේ. $LC = \frac{1}{4} AC$ බව පෙන්වන්න.

3.



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $QN = NO$ බව
(ii) $POM\,\Delta \equiv NLM\,\Delta$ බව
(iii) $PNLO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iv) $MO = \frac{1}{4}\,QO$ බව

පෙන්වන්න.

4. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ. එහි විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර LO රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. දික්කල PT රේඛාව හා QR රේඛාව Y හි දී හමු වේ.

(i) $PT = TY$ බව
(ii) $PLYO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iii) $4\,LT = QR$ බව

පෙන්වන්න.

5. PQR ත්‍රිකෝණයේ PR හා PQ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. QX හා YR රේඛා L හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. Q හරහා YRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව දික්කල PL පාදය M හි දී හමු වේ. LM හා QR රේඛා N හි දී ඡේදනය වේ.

(i) $PL = LM$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $MR//QX$ බව පෙන්වන්න.
(iii) $QMRL$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.
(iv) $\frac{PL}{PN}$ හි අගය සොයන්න.

12 ප්‍රස්තාර

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් ලබා ගැනීමට
- $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඇඳීමට
- ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් ශ්‍රිතයේ හැසිරීම විග්‍රහ කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ඔබ මීට පෙර සරල රේඛාව සම්බන්ධ ව කළ හැදෑරීම්වල දී සරල රේඛීය ප්‍රස්තාර ඇඳීම පිළිබඳ උගත් විෂය කරුණු නැවත මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ නිරත වන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. ***a.*** x සඳහා තෝරා ගත් අගයන් තුනකට අනුරූප y හි අගයන් ගණනය කර පහත දැක්වෙන එක් එක් සරල රේඛාව එක ම ඛණ්ඩාංක තලයේ ඇඳ දක්වන්න.

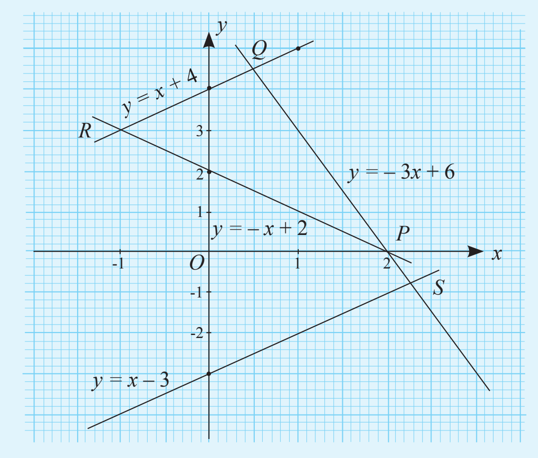
(i) $y = x + 1$ (ii) $y - x = 5$ (iii) $2y = -x - 4$ (iv) $3x + 2y = 6$

b. ඉහත ඇඳිනු ලැබූ එක් එක් සරල රේඛාවට අක්ෂ හමු වන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සරල රේඛාව ඉදිරියෙන් දක්වා ඇති ඛණ්ඩාංක අතුරින් කුමන ඛණ්ඩාංක අදාළ සරල රේඛාව මත පිහිටන්නේ ද යන්න තෝරා දක්වන්න.

(i) $y = 2x - 3$; (1, 1), (0, 3), (2, 1) (ii) $y = 2x - 3$; (0, – 3), $(\frac{1}{2}, 4)$, (1, 3)

3. ඛණ්ඩාංක තලයක ඇඳිනු ලැබූ සරල රේඛා හතරක සටහනක් මෙහි දැක්වේ. රේඛා එකිනෙක ඡේදනය වන P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක, දී ඇති ඛණ්ඩාංක යුගල 7 අතුරින් තෝරන්න. ඔබේ පිළිතුරු සඳහා හේතු දක්වන්න.



(– 3, 5), (– 1, 3), (– 1, – 3)

$(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, (2, 0), $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$,

$(2\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$

12.1 සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් සෙවීම

සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් සොයන ආකාරය මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගෙන ඇත. එහි දී එම සමීකරණ විසඳනු ලැබුවේ වීජීය ක්‍රම ඇසුරෙනි. එහෙත් මෙහි දී අපගේ අවධානය යොමු වන්නේ වීජීය ක්‍රම භාවිත නොකොට පහත විස්තර කෙරෙන අයුරින් සමගාමී සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කර විසඳුම් ලබා ගන්නේ කෙසේ ද යන්න පිළිබඳ ව යි.

මෙහි දැක්වෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලය පිළිබඳ අවධානය යොමු කරන්න.

$$y - x = -3$$
$$y + 3x = 5$$

ප්‍රථමයෙන් වීජීය ක්‍රමයට මෙම සමගාමී සමීකරණ යුගලය විසඳමු.

$$y - x = -3 \quad \text{——} \quad (1)$$
$$y + 3x = 5 \quad \text{——} \quad (2)$$

(2) – (1) න් $(y + 3x) - (y - x) = 5 - (-3)$

$$\therefore y + 3x - y + x = 5 + 3$$
$$\therefore 4x = 8$$
$$\therefore x = 2$$

$x = 2$ (1) හි ආදේශයෙන්

$$y - 2 = -3$$
$$\therefore y = -3 + 2$$
$$\therefore y = -1$$

$\therefore$ විසඳුම

$x = 2$ හා $y = -1$

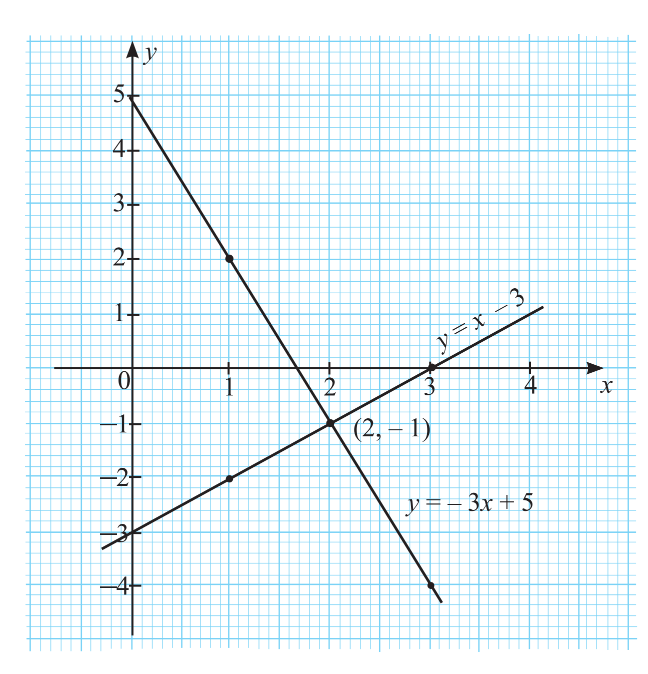
මෙම සමීකරණ යුගලය සැලකිල්ලට ගත් විට $y = x - 3$ හා $y = -3x + 5$ ආකාරයෙන් සරල රේඛා දෙකක සමීකරණ ලෙස, y උක්ත කොට ලියා දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම, මෙම සමීකරණවලින් දැක්වෙන සරල රේඛා දෙක එක ම ඛණ්ඩාංක තලයක අඳිමු. ඒ සඳහා සූදානම් කළ වගු දෙකක් පහත දැක්වේ.

$y = x - 3$

x	1	2	3
y	– 2	– 1	0

$y = -3x + 5$

x	1	2	3
y	2	– 1	– 4



එක ම ඛණ්ඩාංක තලයක ඉහත ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කළ පසු ලැබෙන සරල රේඛා යුගලය $(2, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. මෙම ලක්ෂ්‍යයේ x හා y අගයන් ඉහත සමීකරණ යුගලයට ආදේශ කළ විට සමීකරණ යුගලයේ දෙපස ම සමාන වන බව නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය. එනම්, මෙම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක වන $x = 2$ හා $y = -1$ යන අගය ඉහත සමගාමී සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම බව පැහැදිලි වේ.

ඉහත සමීකරණ යුගලය වීජීය ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳීමෙන් ලැබුණු පිළිතුර හා සමාන වීම නිසා තවදුරටත් සමීකරණ යුගලයේ ජ්‍යාමිතික විසඳුම තහවුරු වේ.

මේ අනුව, සමගාමී සමීකරණ දෙකක විසඳුම, ජ්‍යාමිතික ව සෙවීම සඳහා කළ යුත්තේ, එම සමීකරණ සහිත සරල රේඛා යුගලය ඛණ්ඩාංක තලයක ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම යි. x – ඛණ්ඩාංකය මගින් x හි අගයත්, y – ඛණ්ඩාංකය මගින් y හි අගයත් විසඳුම ලෙස එවිට ලැබේ.

පහත නිදසුනේ, සමගාමී සමීකරණ යුගලක් ගොඩනගා ඒවා ජ්‍යාමිතික ව විසඳන අයුරු විමසා බැලෙයි.

නිදසුන 1

පුද්ගලයෙක් තැපැල්හලකින් වටිනාකම රුපියල් 10 හා රුපියල් 20 වූ මුද්දර 10ක් මිල දී ගත්තේ ය. මිල දී ගත් මුද්දරවල මුළු වටිනාකම රුපියල් 120ක් වේ.

(i) මිල දී ගත් රුපියල් 10 මුද්දර ගණන x ලෙස ද රුපියල් 20 මුද්දර ගණන y ලෙස ද ගෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳා, මිල දී ගත් රුපියල් 10 හා රුපියල් 20 මුද්දර ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

අදාළ සමගාමී සමීකරණ යුගලය පහත ආකාරයට ගොඩනගා ගත හැකි වේ.

$$x + y = 10 \quad \text{——— (1)}$$
$$10x + 20y = 120 \quad \text{——— (2)}$$

ඉහත එක් එක් සමීකරණය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරමු.

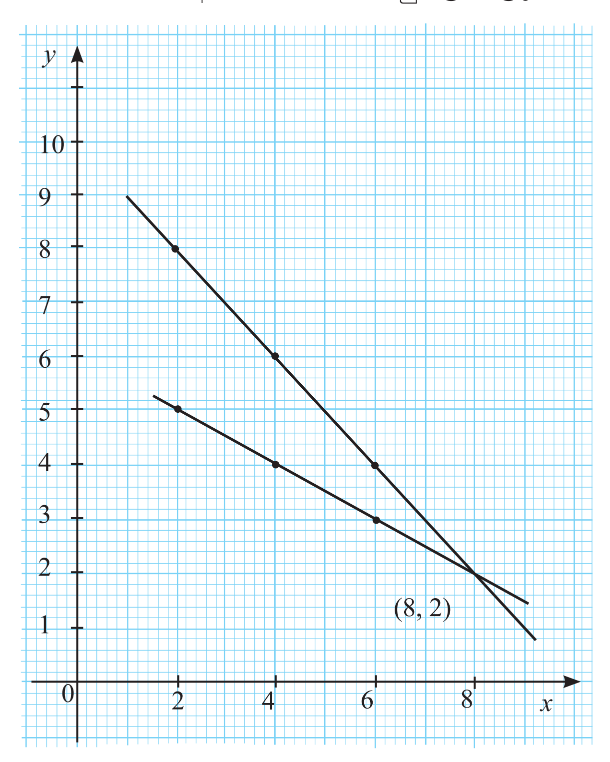
$x + y = 10$ එනම්, $y = -x + 10$

x	2	4	6
y	8	6	4

$10x + 20y = 120$ එනම්, $y = -\frac{1}{2}x + 6$

x	2	4	6
y	5	4	3

මෙවිට, පහත ආකාරයේ රේඛා යුගලක් ලැබේ.



$x + y = 10$ හා $10x + 20y = 120$ මගින් නිරූපිත සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කළ විට $(8, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. එවිට අදාළ සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම $x = 8$ හා $y = 2$ වේ. එනම් පුද්ගලයා මිල දී ගත් රුපියල් 10 මුද්දර ප්‍රමාණය 8ක් ද රුපියල් 20 මුද්දර ප්‍රමාණය 2ක් ද වේ.

12.1 අභ්‍යාසය

1. පහත එක් එක් සමගාමී සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳන්න. වීජීය ක්‍රමය භාවිතයෙන් ද එම සමීකරණ විසඳා පිළිතුරු තහවුරු කරන්න.

a. $y - x = 4$
$y - 2x = 3$

b. $y = -2x - 2$
$-2y = -x - 6$

c. $3x - 4y = 7$
$5x + 2y = 3$

2. එක්තරා පාසලක 11 වන ශ්‍රේණියේ A හා B පන්ති දෙකක් ඇත. A පන්තියේ ළමුන් පහක් B පන්තියට ගිය විට A පන්තියේ මෙන් දෙගුණයක් B පන්තියේ සිටී. B පන්තියෙන් ළමුන් පහක් A පන්තියට ගිය විට පන්ති දෙකේ ම ළමුන් ගණන සමාන වේ.

(i) A පන්තියේ ළමුන් ගණන x ලෙස ද B පන්තියේ ළමුන් ගණන y ලෙස ද ගෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණ යුගලය එකම ඛණ්ඩාංක තලයක ඇඳ දක්වා ඒ ඇසුරෙන් පන්ති දෙකෙහි සිටි ළමුන් සංඛ්‍යාව වෙනවෙනම සොයන්න.

වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර

$y = ax^2$ හා $y = ax^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර සම්බන්ධයෙන් මීට පෙර උගත් කරුණු නැවත මතකයට නගා ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති අභ්‍යාසයෙහි නිරත වන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. $y = x^2 - 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා ලබා ගත් x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	___	-4	-5	___	-1	4

a. (i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් භාවිත කර, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

b. ඇඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්
(i) ශ්‍රිතයේ අවම අගය
(ii) ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(iii) ශ්‍රිතයේ අගය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(iv) ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(v) $y = -1$ විට x හි අගය
සොයන්න.

2. (i) $y = -2x^2 + 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා පහත දැක්වෙන අසම්පූර්ණ අගය වගුවේ හිස්තැන සම්පූර්ණ කරන්න.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	___	2	4	2	-4	-14

(ii) සුදුසු පරිමාණයක් භාවිත කර, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
ඇඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්
(iii) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ (වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ) ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වන x හි අගයන් ලබා ගන්න.
(v) ශ්‍රිතය සෘණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $y \leq 2$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය සොයන්න.
(vii) $\sqrt{2}$ හි අගය දශමස්ථාන 1කට නිමානය කරන්න.

3. වගුවේ දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය මගින් දැක්වෙන ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව, වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ශ්‍රිතය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය (උපරිම/අවම)	සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	උපරිම/අවම අගය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(i) $y = 2x^2$	....	....	....	....
(ii) $y = \frac{1}{2}x^2$	....	....	....	....
(iii) $y = x^2 + 3$	....	....	....	....
(iv) $y = 1 - 2x^2$	උපරිම	$x = 0$	1	(0, 1)
(v) $y = -3x^2 - 4$	....	....	....	....
(vi) $y = \frac{3}{2}x^2 - 2$	....	....	....	....

12.2 $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය

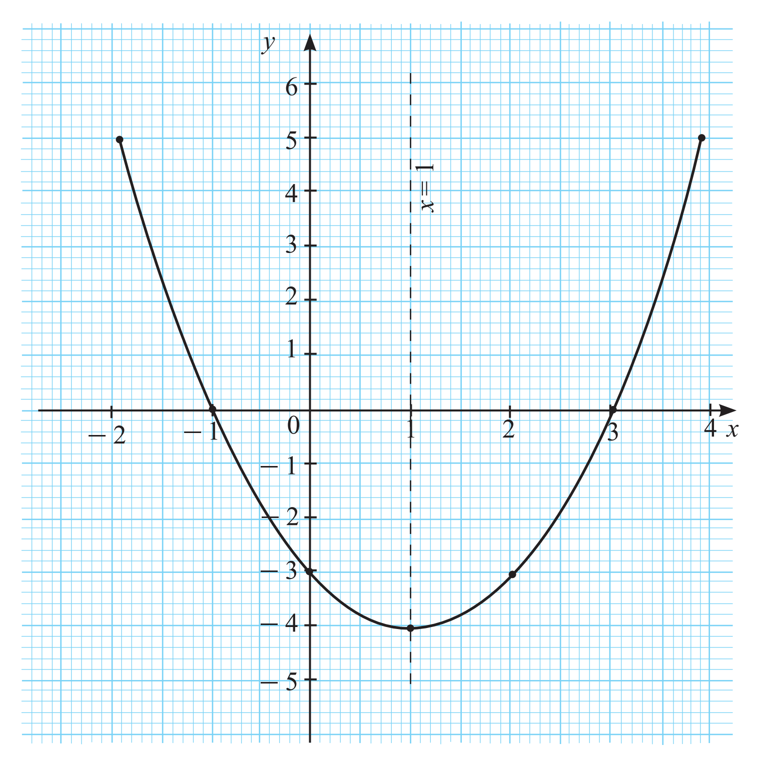
$y = ax^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර සම්බන්ධ ව මීට පෙර උගෙන ඇති ලක්ෂණවල දැනුම භාවිත කර, $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර පිළිබඳ ලක්ෂණ හැදෑරීම සඳහා මුලින් ම අවධානය යොමු කරමු.

$a > 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය ඇඳීම හා එහි ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම

මූලික ලක්ෂණ කිහිපයක් හඳුනා ගැනීම සඳහා ප්‍රථමයෙන් $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. ඒ සඳහා $-2 \leq x \leq 4$ පරාසය තුළ y හි අගයන් ලබා ගැනීම සඳහා අගය වගුවක් පහත ආකාරයට පිළියෙල කරමු.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(-1, 0)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(3, 0)$	$(4, 5)$

ඉහත ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට පෙර x හා y හි අගයයන්ගේ පරාසය පිළිබඳ ව අවබෝධයක් ලබා ගෙන ඒ අනුව x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද දැක්වෙන සේ පරිමාණය ගෙන ඛණ්ඩාංක තලය පිළියෙල කොට $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම පහසු වේ.



$y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරයට පරාවලයක් යැයි කියනු ලැබේ.

අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් පහත ලක්ෂණ නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය.

- ප්‍රස්තාරය $x = 1$ රේඛාව වටා සමමිතික වේ. ඒ අනුව ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 1$ වේ.

ප්‍රස්තාරයේ x හි අගය -2 සිට ක්‍රමයෙන් වැඩි වන විට ඊට අනුරූප y හි අගය ක්‍රමයෙන් අඩු වී අවම අගය වන -4 ලැබුණු පසු නැවත වැඩි වේ.

ඉහත ප්‍රස්තාරයේ x හි අගය පරාසය තුළ y හි හැසිරීම තවදුරටත් විස්තරාත්මක ව පැහැදිලි කර ගනිමු.

- x හි අගය -2 සිට -1 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය හෙවත් ශ්‍රිතයේ අගය 5 සිට 0 (ශූන්‍යය) දක්වා ධන ව අඩු වේ. මෙහි "ධන ව අඩු වේ" යන්නෙහි තේරුම, ශ්‍රිතයේ අගය ධන අගයක් ව පවතිමින් අඩු වන බවයි.
- x හි අගය -1 වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය -1 සිට 1 දක්වා වැඩි වන විට ඊට අනුරූප ව y හි අගය 0 සිට -4 තෙක් ඍණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය 1 සිට 3 දක්වා වැඩි වන විට ඊට අනුරූප ව y හි -4 සිට 0 තෙක් ඍණ ව වැඩි වේ.
- x හි අගය 3 වන විට y හි අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය 3හි සිට වැඩි වන විට y හි අගය 0 සිට ධන ව වැඩි වේ.

ඉහත ලක්ෂණ සැලකීමෙන්,

- ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය පරාසය අසමානතා ඇසුරෙන් $-1 < x < 3$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

- x හි අගය -1ට වඩා අඩු හෝ x හි අගය 3ට වඩා වැඩි වන විට y හි අගය ධන වේ. එනම්, ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාස $x < -1$ හා $x > 3$ වේ.

මීට අමතර ව පහත කරුණු ගැන අවධානය යොමු කරන්න.

- මෙම ඇඳ ඇති ප්‍රස්තාරයත්, දී ඇති $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයත් අතර ඇති සම්බන්ධය තේරුම් ගැනීම ඉතා වැදගත් ය. එය මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.
  1. ප්‍රස්තාරය මත ඕනෑ ම (a, b) ලක්ෂ්‍යයක් ගත හොත්, $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය $x = a$ හා $y = b$ මගින් තෘප්ත වේ. එනම්, $b = a^2 - 2a - 3$ සමීකරණය සත්‍ය වේ.
  2. විලෝම වශයෙන්, යම් (a, b) ඛණ්ඩාංකය මගින් $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය තෘප්ත වේ නම් එවිට (a, b) ලක්ෂ්‍යය ප්‍රස්තාරය මත පිහිටයි.

මෙම අවශ්‍යතා දෙක නිතර සිහි තබා ගැනීම ඉතා වැදගත් ය. $(-1, 0)$ ලක්ෂ්‍යය ප්‍රස්තාරය මත පිහිටන බව පෙනේ. එමනිසා $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය $x = -1$ හා $y = 0$ මගින් තෘප්ත විය යුතු ය. එනම්, $0 = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ විය යුතු ය. එය මෙසේ වන බව සුළු කිරීමෙන් පෙනේ. වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, $x = -1$ යන්න $x^2 - 2x - 3 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් වේ. මෙවැනි තර්කනයකින් $x = 3$ ද මෙම සමීකරණයේ මූලයක් වන බව කිව හැකි ය. තවත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, $x^2 - 2x - 3 = 0$ සමීකරණයේ මූල වන්නේ $y = x^2 - 2x - 3$ ප්‍රස්තාරය $x -$ අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යවල x ඛණ්ඩාංක යි. මෙය වඩාත් සාධාරණ ලෙස මෙසේ ද ලියා දැක්විය හැකි ය. $y = ax^2 + bx + c$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය $x -$ අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යවල $x -$ ඛණ්ඩාංක වන්නේ $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

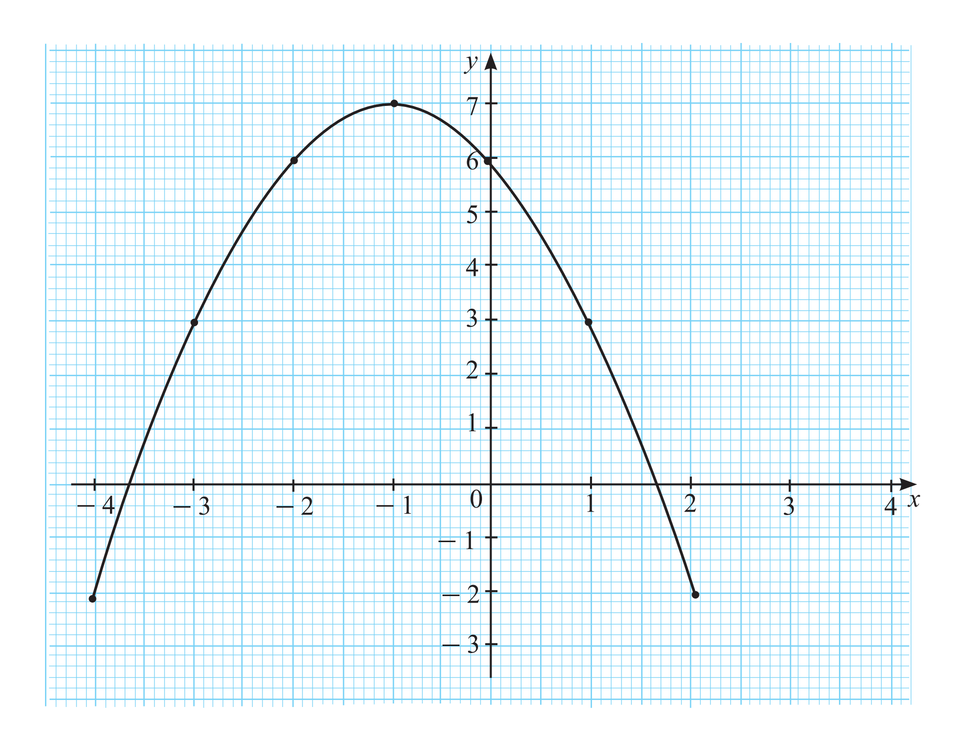
- ඉහත ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ දී ශ්‍රිතයේ අවම අගය ලැබේ. අවම අගය -4 වේ. හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(1, -4)$ වේ.

$a < 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය ඇඳීම හා එහි ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම

$y = -x^2 - 2x + 6$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා පහත දැක්වෙන පරිදි $-4 \leq x \leq 2$ පරාසය තුළ අගය වගුවක් සකස් කරමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$-x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4
$-2x$	8	6	4	2	0	-2	-4
$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$
y	-2	3	6	7	6	3	-2
(x, y)	$(-4, -2)$	$(-3, 3)$	$(-2, 6)$	$(-1, 7)$	$(0, 6)$	$(1, 3)$	$(2, -2)$

x හා y හි අගය පරාසය පිළිබඳ සලකා, x අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය තෝරා ගෙන, පහත දැක්වෙන ආකාරයට ප්‍රස්තාරය ඇඳිය හැකි වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණයෙන් පහත කරුණු හඳුනා ගත හැකි වේ.

- උපරිම අගය 7 වන අතර ප්‍රස්තාරය $x = -1$ රේඛාව වටා සමමිතික වේ. ඒ අනුව ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -1$ වේ.
- හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-1, 7)$ වේ.
- x හි අගය -4 සිට -3.6 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය සෘණ ව වැඩි වේ.
- $x = -3.6$ දී ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය -3.6 සිට -1 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය 0 සිට 7 දක්වා ධන ව වැඩි වේ.
- x හි අගය -1 දී ශ්‍රිතය $+7$ වූ උපරිම අගය ලබා ගනී.
- x හි අගය -1 සිට $+1.6$ දක්වා වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව අඩු වේ.
- $x = +1.6$ දී ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය 1.6 සිට වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය සෘණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය -3.6 හා $+1.6$ අතර විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන වේ. (එනම්, ශ්‍රිතය ධන ව පවතින x හි පරාසය $-3.6 < x < +1.6$ වේ.
- x හි අගය -3.6ට අඩු වන විට හා $+1.6$ ට වැඩි වන විට ශ්‍රිතය සෘණ වේ. (එනම්, ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය පරාස $x < -3.6$ හා $x > 1.6$ වේ).
- ප්‍රස්තාරය $y = 0$ රේඛාව (x අක්ෂය) ඡේදනය වන්නේ $x = -3.6$ හා $x = +1.6$ දී වේ. එවිට $-x^2 - 2x + 6 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන x හි අගයයන් හෙවත් මූල වනුයේ $x = -3.6$ හා $x = +1.6$ ය.
- $0 \leq x \leq 2$ පරිදි වූ x අගය පරාසය තුළ ශ්‍රිතය ගන්නා උපරිම අගය 6 ද අවම අගය -2 ද වේ.

12.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය, සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන, දී ඇති පරාසය තුළ ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = x^2 + 2x - 7$ $(-4 \leq x \leq 2)$

ප්‍රස්තාරයේ,

(a) අවම අගය
(b) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(c) සමමිති අක්ෂය ඇඳ, එහි සමීකරණය
(d) $y = 0$ වන x හි අගයන්
(e) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(f) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(g) ශ්‍රිතයෙහි අගය ධන ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(h) ශ්‍රිතයෙහි අගය සෘණ ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

2. $y = x^2 - 4x + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සකස් කළ අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	___	2	-1	___	-1	2	7

(i) ඉහත වගුව සම්පූර්ණ කර, x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.

(ii) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

(a) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(b) අවම අගය
(c) ශ්‍රිතයේ අගය ශුන්‍ය වන x හි අගයයන්
(d) $y \leq -1$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(e) $x^2 - 4x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල

ලියා දක්වන්න.

3. පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය, දක්වා ඇති අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = -x^2 - 2x + 3$ $(-4 \leq x \leq 2)$

ප්‍රස්තාරයේ,

(a) උපරිම අගය
(b) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(c) සමමිති අක්ෂය ඇඳ එහි සමීකරණය

(d) $y = 0$ වන x හි අගයන්
(e) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(f) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(g) ශ්‍රිතයෙහි අගය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(h) ශ්‍රිතයෙහි අගය සෘණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

4. $y = -2x^2 + 3x + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y අගයයන් දැක්වෙන අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-2	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	2	3	3.5
y	-12	-3	2	___	3	___	-7	-12

(i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවා, x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත සඳහන් ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.

(ii) අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්,
(a) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(b) ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය
(c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල
(d) ශ්‍රිතය ධනව වැඩිවන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(e) ශ්‍රිතයේ අගය 4 වන x හි අගයන්
(f) ශ්‍රිතයේ අගය -4 වන x හි අගයන්

ලියා දක්වන්න.

12.3 $y = \pm (x \pm b)^2 + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

$y = \pm (x \pm b)^2 + c$ මගින් ද වර්ගජ ශ්‍රිතයක් දැක්වේ. මෙහි දී වර්ගජ ශ්‍රිතය විශේෂ ආකාරයකට, එනම් $y = \pm (x + b)^2 + c$ ආකාරයට ලියා ඇත. එසේ ලියා ඇති විට, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි සමහර ලක්ෂණ උකහා ගැනීම, ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව ම සිදු කළ හැකි ය. පහත වගුවේ දැක්වෙන්නේ එසේ උකහා ගත හැකි ලක්ෂණ කිහිපයකි.

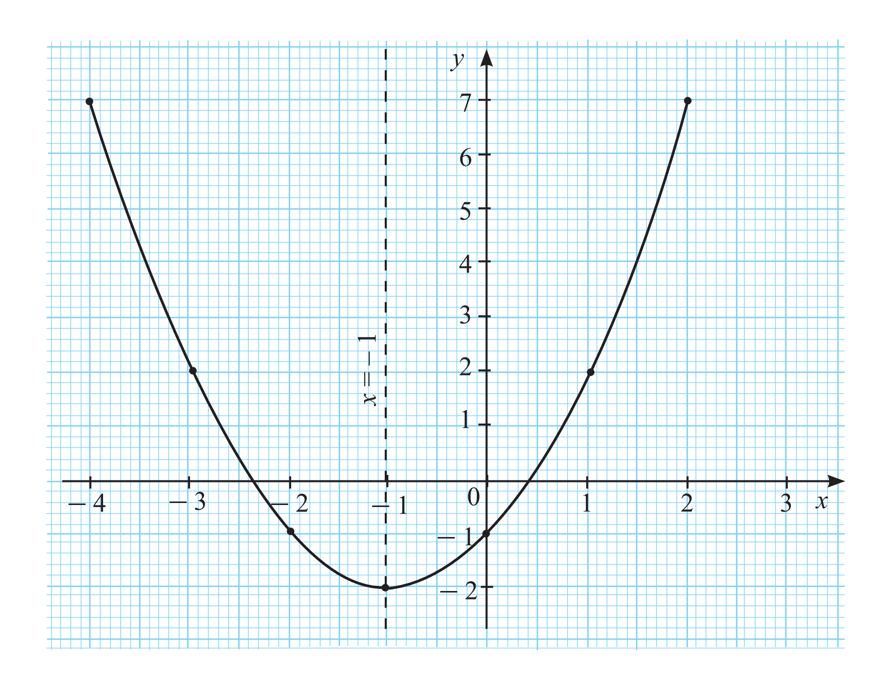
ශ්‍රිතයේ සමීකරණය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය	ශ්‍රිතයේ උපරිම/අවම අගය	ප්‍රස්තාරයේ උපරිම/අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක	ප්‍රස්තාරයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
$y = (x + b)^2 + c$	අවමයකි	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, b^2 + c)$
$y = -(x + b)^2 + c$	උපරිමයකි	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, -b^2 + c)$

වගුවේ දැක්වෙන ලක්ෂණ සත්‍යාපනය කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන සලකා බලමු.

$y = (x+1)^2 - 2$ ශ්‍රිතය සලකමු. එය $b = 1$ හා $c = -2$ වන $y = (x+b)^2 + c$ ආකාරයේ වේ. එම ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x හි අගය -4 සිට $+2$ දක්වා ඇඳීමට අවශ්‍ය අනුරූප y හි අගයන් පහත ආකාරයට වගුවක් ඇසුරෙන් ගණනය කරමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$(x+1)^2$	9	4	1	0	1	4	9
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	7	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-4, 7)$	$(-3, 2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -2)$	$(0, -1)$	$(1, 2)$	$(2, 7)$

x-අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වෙන ආකාරයට ඇඳ දැක්විය හැකි ය.



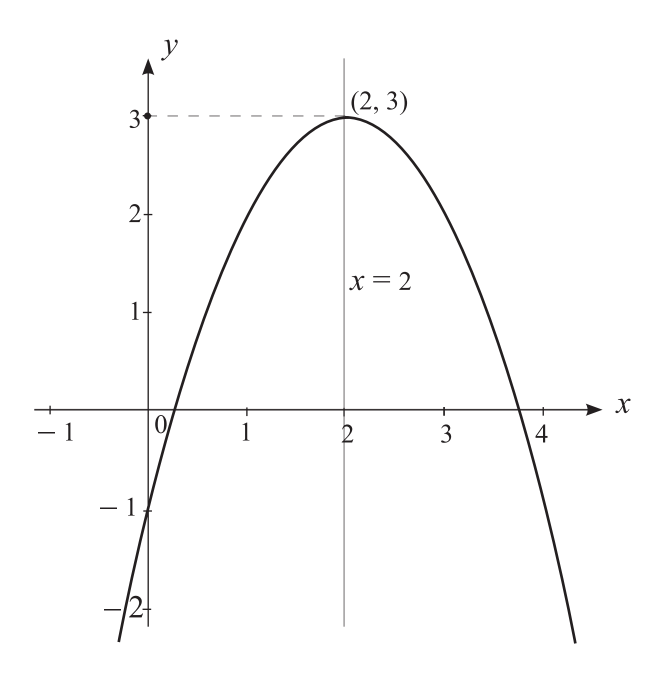
සටහන:
මෙම ප්‍රස්තාරයට අවම ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. ශ්‍රිතයේ අවම අගය $-2\ (=c)$ වේ. ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-1, -2)$ එනම්, $(-b, c)$ වන අතර සමමිති අක්ෂය $x = -1$ (එනම්, $x = -b$ වේ.)

වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය $x = \pm (x+b)^2 - c$ ආකාරයෙන් දී ඇති විට, ඉහත වගුවේ දක්වා ඇති ලක්ෂණ ආධාරයෙන්, ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය. පහත නිදසුනේ එවැනි දළ සටහනක් අඳින ආකාරය පැහැදිලි කෙරේ.

නිදසුන 1

$y = -\ (x-2)^2 + 3$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

මෙම ශ්‍රිතයේ $(x-2)^2$ හි සංගුණකය සෘණ නිසා ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය උපරිමයකි. එම උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(2, 3)$ වේ. සමමිති රේඛාව $x = 2$ වේ. තව ද, ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ස්ථානය සොයා ගැනීම සඳහා $y = -\ (x-2)^2 + 3$ හි $x = 0$ ආදේශ කරමු. එවිට, $y = -(0-2)^2 + 3 = -1$ ලැබේ. ඒ අනුව, පහත ආකාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය.



නිදසුන 2

$y = x^2 + 3x - 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයේ

(i) ස්වභාවය
(ii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය
(iii) ශ්‍රිතයේ උපරිම/අවම අගය
(iv) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

ලියා දක්වන්න.

ශ්‍රිතය $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් දී ඇත. මුලින් ම එය $y = (x + b)^2 + c$ ආකාරයෙන් ලියා ගනිමු. මේ සඳහා පහත ක්‍රමය යොදාගත හැකි ය.

$$y = x^2 + 3x - 4$$

$y = (x + \frac{3}{2})^2 - 4 - \frac{9}{4}$, එනම් $y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

(i) අවමයක් සහිත පරාවලයකි

(ii) $x = -\frac{3}{2}$ එනම් $x = -1\frac{1}{2}$

(iii) අවම අගය $-\frac{25}{4}$ වේ.

(iv) $(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

12.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x - 2)^2 - 3 \quad (-1 \leq x \leq 5)$ (ii) $y = (x + 3)^2 - 4 \quad (-6 \leq x \leq 0)$

ඉහත එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

a. ශ්‍රිතයේ අවම අගය
b. ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
c. සමමිති අක්ෂය ඇඳ එහි සමීකරණය
d. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
e. $y = 0$ වන x හි අගයයන්
f. ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = -(x + 2)^2 + 2 \quad (-5 \leq x \leq 1)$ (ii) $y = -(x - 1)^2 + 3 \quad (-2 \leq x \leq 4)$

ඉහත ඇඳි එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

a. ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය
b. ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
c. ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාව ඇඳ එහි සමීකරණය
d. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
e. ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
f. $y = 0$ වන x හි අගයයන්
g. ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
h. ශ්‍රිතය ඍණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x - 2)^2 - 3$
(ii) $y = 2 - (x + 5)^2$
(iii) $y = x^2 + 6x - 1$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය මගින් නිරූපණය වන ප්‍රස්තාරය නොඇඳ, ශ්‍රිතයේ

a. ස්වභාවය
b. සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය
c. උපරිම/අවම අගය
d. හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

(i) $y = (x + 2)^2 - 3$
(ii) $y = -(x - 2)^2 + 4$
(iii) $y = -(x - \frac{3}{2})^2 + 1$
(iv) $y = 1\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2$
(v) $y = 3\frac{1}{3} + (x + 2\frac{1}{2})^2$
(vi) $y = (x^2 + 6x + 5)$

12.4 $y = \pm(x \pm a)(x \pm b)$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

$y = \pm(x + a)(x + b)$ මගින් ද වර්ගජ ශ්‍රිතයක් දැක්වේ. මෙහි දී වර්ගජ ශ්‍රිතය විශේෂ ආකාරයකට, එනම් $y = \pm(x + a)(x + b)$ ආකාරයට දී ඇත. එසේ දී ඇති විට, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි සමහර ලක්ෂණ උකහා ගැනීම, ඉහත කොටසේ පරිදි ම ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව ම සිදු කළ හැකි ය. පහත වගුවේ දැක්වෙන්නේ එසේ උකහා ගත හැකි ලක්ෂණ කිහිපයකි.

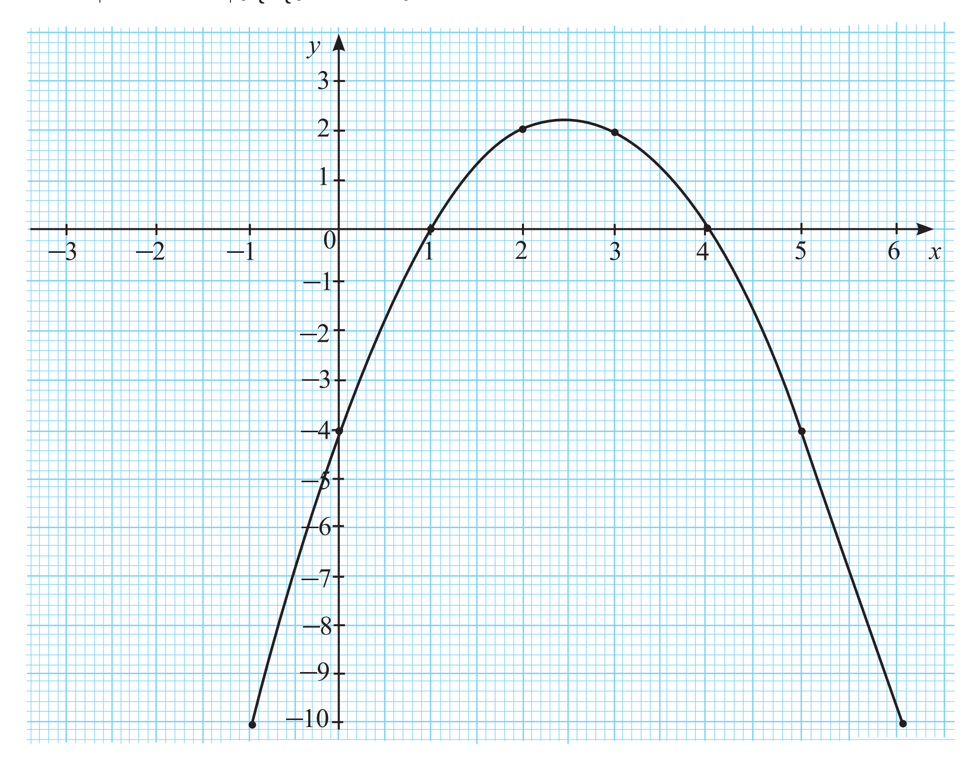
ශ්‍රිතයේ සමීකරණය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය	ප්‍රස්තාරයේ උපරිම/අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක	ප්‍රස්තාරයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	ප්‍රස්තාරය x-අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍ය	ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය
$y = (x + a)(x + b)$	අවමයකි	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, -\frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$	$(0, +ab)$
$y = -(x + a)(x + b)$	උපරිමයකි	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$	$(0, -ab)$

ඉහත වගුවේ දැක්වෙන ලක්ෂණ සත්‍යාපනය කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන සලකා බලන්න.

$y = -(x-1)(x-4)$ ශ්‍රිතය සලකමු. එය, $y = -(x+a)(x+b)$ ආකාරයේ වේ. ($a = -1$ හා $b = -4$). එහි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට අවශ්‍ය x හි අගය ලබා ගැනීමට පහත පරිදි අගය වගුවක් සකස් කරමු.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-(x-1)(x-4)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10
(x, y)	$(-1, -10)$	$(0, -4)$	$(1, 0)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$	$(4, 0)$	$(5, -4)$	$(6, -10)$

x අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වෙන ආකාරයට ඇඳ දැක්විය හැකි ය.



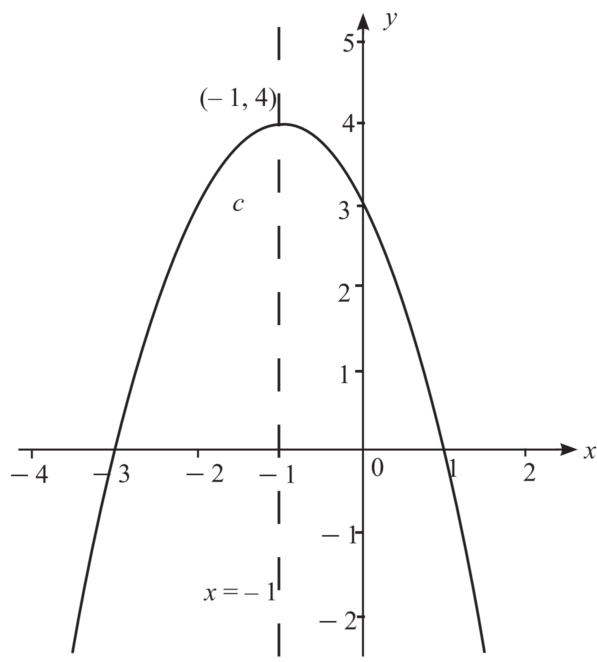
මෙම ප්‍රස්තාරය, වගුවේ දී ඇති ලක්ෂණ සපුරාලන බව, ඉහත 12.3 කොටසේ නිදසුනේ දී මෙන් තහවුරු කර ගන්න.

වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය $y = \pm(x+a)(x+b)$ ආකාරයෙන් දී ඇති විට, ඉහත වගුවේ දක්වා ඇති ලක්ෂණ ආධාරයෙන්, ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය. පහත නිදසුනෙන් එවැනි දළ සටහනක් අඳින ආකාරය පැහැදිලි කෙරේ.

නිදසුන 1

$y = -(x + 3)(x - 1)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

මෙය, $a = 3$ හා $b = -1$ වන $y = -(x + a)(x + b)$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයකි. මෙම ශ්‍රිතයේ x හි සංගුණකය සෘණ නිසා ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය උපරිමයකි. x - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍ය වන්නේ $(-3, 0)$ හා $(1, 0)$ යි. උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක වන්නේ $\left(-\frac{(a+b)}{2}, \frac{+(a-b)^2}{4}\right) = (-1, +4)$ යි. ඒ අනුව, පහත ආකාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය.



නිදසුන 2

$y = x^2 + 5x - 14$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය නොඇඳ, ප්‍රස්තාරයේ

(i) ස්වභාවය
(ii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය
(iii) උපරිම/අවම අගය
(iv) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(v) x අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක

ලියා දක්වන්න.

දැන් මෙම ශ්‍රිතය $y = (x + a)(x + b)$ ආකාරයට සකසා ගනිමු. සාධක සෙවීමෙන්, එය

$y = (x - 2)(x + 7)$ ලෙස ලියා ගත හැකි ය.

(i) ශ්‍රිතය අවම අගයක් සහිත පරාවලයකි.

(ii) $a = -2$ හා $b = 7$ නිසා සමමිති අක්ෂය වන්නේ

$$x = -(a + b)/2 = -(-2 + 7)/2$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

(iii) අවම අගය $\dfrac{-(a-b)^2}{4}$ මගින් ලැබෙන නිසා,

අවම අගය $= \dfrac{-(-2-7)^2}{4} = -\dfrac{81}{4}$

(iv) අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-\frac{5}{2}, -\frac{81}{4})$

(v) ප්‍රස්තාරය x-අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක $(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$ මගින් ලැබෙන නිසා $(2, 0)$ හා $(-7, 0)$ වේ.

12.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රස්තාරය, ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(a) $y = (x+1)(x+6)$ $\quad(-7 \leq x \leq 0)$
(b) $y = (x-2)(x-5)$ $\quad(0 \leq x \leq 7)$
(c) $y = -(x+1)(x+3)$ $\quad(-5 \leq x \leq 1)$
(d) $y = -(x-5)(x-3)$ $\quad(+1 \leq x \leq 7)$

ඉහත ඇඳි එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්
(i) y ශූන්‍ය වන x හි අගයයන්
(ii) ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාව ඇඳ, එහි සමීකරණය
(iii) ශ්‍රිතයේ අවම/උපරිම අගය
(iv) ප්‍රස්තාරයේ අවම/උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය
(v) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(vi) ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(vii) අදාළ x හි අගය ප්‍රාන්තරය තුළ y හි විචලනයේ ස්වභාවය
ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x-3)(x+5)$
(ii) $y = (x-1)(x-2)$
(iii) $y = -(x+3)(x-6)$

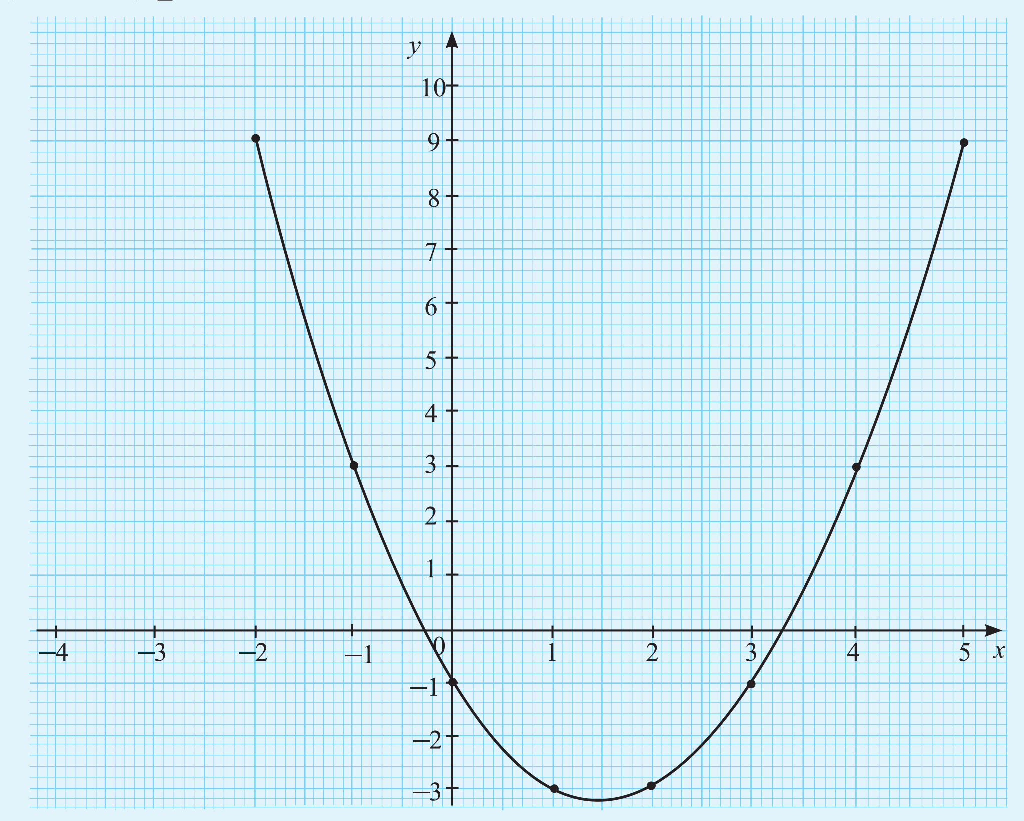
3. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිත මගින් නිරූපණය වන ප්‍රස්තාර නොඇඳ

a. ප්‍රස්තාරයේ ස්වභාවය **b.** සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය
c. උපරිම/අවම අගය **d.** හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

(i) $y = (x-2)\ (x+3)$ (ii) $y = (x+1)\ (x-4)$ (iii) $y = (x-4)\ (x-1)$
(iv) $y = -(x-\frac{1}{2})\ (x+3)$ (v) $y = x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ (vi) $y = x^2 - 4x + 7$
(vii) $y = -x^2 - 6x - 5$ (viii) $y = -x^2 + 12x + 35$ (ix) $y = x^2 - x + 4$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. ***(a)*** $-2 \leq x \leq 5$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින ලද වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය රූපයේ දැක්වේ. ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්,



(i) $x = 3$ විට y හි අගය සොයන්න.

(ii) සමමිති රේඛාව ඇඳ, එහි සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

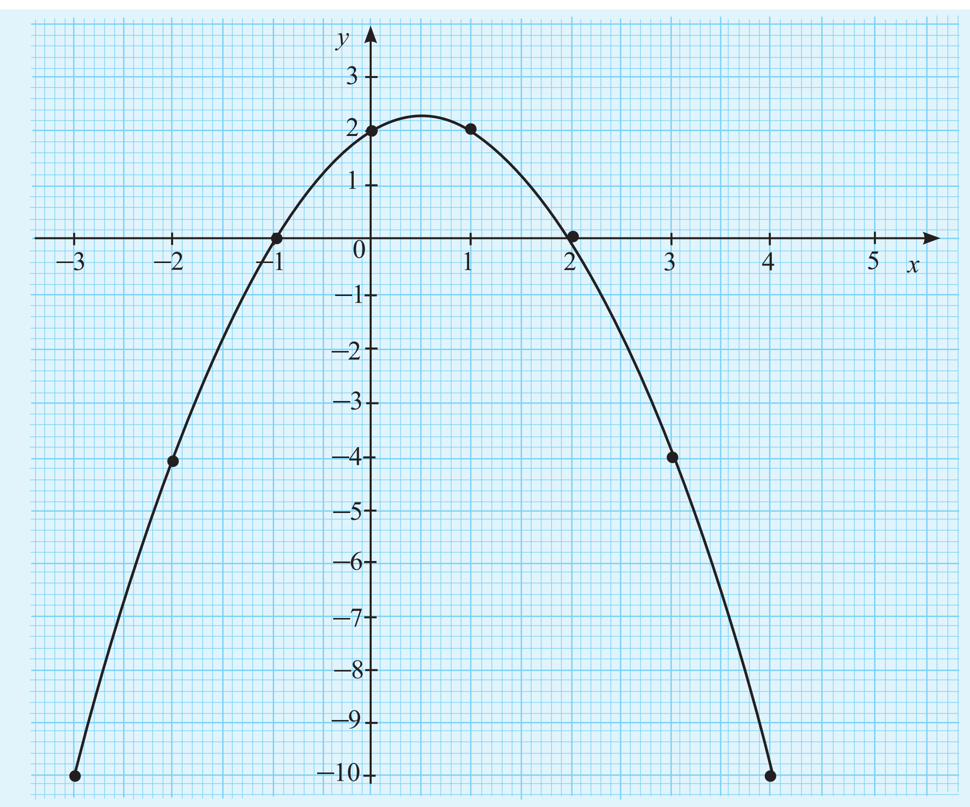
(iii) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

(iv) මෙම වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = (x - a)^2 + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හොත්, a හා b හි අගය සොයන්න.

(v) ඉහත (iv) අනුව $y = 0$ වන x හි අගයන් ලබා ගන්න.

(vi) මෙම ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාවම සහිත වූ ද උපරිම අගය 5 වූ x^2 සංගුණකය 1 වන ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(b) $-3 \leq x \leq 4$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින ලද වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය රූපයේ දැක්වේ.



(i) $y = 0$ වන x හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.

(ii) ඉහත (i) හි පිළිතුර ඇසුරෙන්, අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරයට අදාළ වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = -(x-a)(x-b)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හොත් ලැබෙන, a හා b හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.

(iii) ඉහත (ii) හි a හා b අගයයන් ආදේශ කර ලැබෙන වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = -(x-p)^2 + q$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කර, ශ්‍රිතයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලබා ගෙන, එම අගය ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් තහවුරු කරන්න.

(iv) $y \leq -4$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

(v) ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

2. $(x+2)$ හා $(3-x)$ යනු සංඛ්‍යා දෙකකි. $y = (x+2)(3-x)$ මගින් එම සංඛ්‍යා දෙකෙහි ගුණිතය දැක්වේ.

(i) පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	___	___	6	___	4	___	-6

(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත y ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්

(iii) ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය සොයන්න.
(iv) ශ්‍රිතය උපරිම වන x හි අගය සොයන්න.
(v) ශ්‍රිතය ශූන්‍ය වන x හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.
(vi) $y > 3$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vii) x කුමන අගය ප්‍රාන්තරය තුළ විචලනය වන විට ශ්‍රිතය ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ ද?
(viii) x හි කුමන අගය ප්‍රාන්තරයක් තුළ දී ශ්‍රිතය සඳහා ධන අගයක් ලැබේ ද?
(ix) $-1 \leq x \leq 3$ පරාසය තුළ ශ්‍රිතයේ උපරිම හා අවම අගය ලියා දක්වන්න.
(x) $5 \leq x \leq 8$ පරාසය තුළ ශ්‍රිතයේ උපරිම හා අවම අගය ලියා දක්වන්න.

3. $y = (x-2)^2 - 2$ ශ්‍රිතයේ දී ඇති x හි අගය කිහිපයකට අනුරූප y හි අගයන් ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	2	-1	-2	___	2	7

(i) වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් තෝරාගෙන ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(iii) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) $y < 0$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(v) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් හා වීජීය ක්‍රමයෙන් $x^2 - 4x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.
(vi) ශ්‍රිතයේ අගය 3 වන්නේ x හි කුමන අගයන් සඳහා ද යන්න ලියා දක්වන්න.

4. $y = -(x+1)(x-3)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	___	0	3	4	3	___	-5

(i) $x = -2$ විට හා $x = 3$ විට y හි අගය සොයන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
(iii) ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) $y = 0$ වන x හි අගයන් ලබා ගෙන, ඒ ඇසුරෙන් ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය නිවැරදි බව තහවුරු කරන්න.
(v) $y \geq -1$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ සමීකරණයේ මූල ලියා දක්වන්න.
(vii) $1 \leq x \leq 4$ ප්‍රාන්තරය තුළ ශ්‍රිතයේ හැසිරීම විස්තර කරන්න.

5. $y = 5 - x - x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	___	-1	3	5	5	___	-1	-7

(i) $x = -4$ හා $x = 1$ විට y හි අගය සොයන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
(iii) ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) ශ්‍රිතයේ අගය -5 සිට $+3$ තෙක් වැඩි වන විට x හි අගය පරාසය ලියා දක්වන්න.
(v) ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $-x^2 - x + 5 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
(vii) $y - 3 = 5 - x - x^2$ ශ්‍රිතයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක අපෝහනය කරන්න.

13



මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- පරිමේය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීමට හා විසඳීමට
- සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන්, වර්ග පූරණයෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සම්බන්ධ ව ඔබ මීට පෙර ලබා ගත් දැනුම පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

a. $6x + 2y = 1$
$4x - y = 3$

b. $a + 2b = 3$
$2a + 3b = 4$

c. $m - 4n = 6$
$3m + 2n = 4$

d. $9p - 2q = 13$
$7p - 3q = 0$

e. $2x + 3y = 12$
$3x - 4y = 1$

f. $3a + 12 = 2b$
$13 + 2a = 3b$

2. සරත් ළඟ රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි 20ක් තිබේ. ඒවායේ මුළු වටිනාකම රුපියල් 55කි. සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ කාසි ගණන x ද රුපියල් පහේ කාසි ගණන y ද ලෙස සලකා,

(i) දී ඇති තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ දෙකක් ලියන්න

(ii) එමගින්, සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි ගණන සොයන්න.

3. මාලනී හා නාලනී ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණ ඇත. මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල්වල ඓක්‍යයට රුපියල් 30ක් එකතු වූ විට මුළු මුදල රුපියල් 175ක් වේ. නාලනී ළඟ ඇත්තේ මාලනී ළඟ ඇති මුදලේ දෙගුණයට වඩා රුපියල් 95ක් අඩුවෙනි. මාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් x ද, නාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් y යැයි ද සලකා

(i) දී ඇති තොරතුරු භාවිත කොට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න

(ii) එමගින්, මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල් වෙන වෙන ම සොයන්න.

4. "පොත් 2ක් හා පෑනක් මිල දී ගැනීමට රුපියල් 65ක් වැය වේ. එවැනි පෑන් 2ක් මිල දී ගැනීමට වැය වන මුදලින් එවැනි පොතක් මිල දී ගත හැකි වේ." යන තොරතුරු ඇසුරෙන් සමගාමී සමීකරණ යුගලක් ගොඩනගා පොතක මිලත්, පෑනක මිලත් වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.1 භාගමය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ

සමගාමී සමීකරණ යුගලයක අඥාතවල සංගුණක නිඛිල වන විට දී එම සමගාමී සමීකරණ විසඳා අඥාතවල අගය සෙවීමට මින් පෙර අපි උගත්තෙමු. මෙතැන් සිට සංගුණක ලෙස භාග යෙදෙන සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීම හා විසඳීම පිළිබඳ ව නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

කමල් හා නිමල් ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණයක් ඇත. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{2}$ කට නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් එකතු කළ විට රුපියල් 20ක් ලැබේ. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නම්, දෙදෙනා ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

මෙම ගැටලුව සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගා විසඳන අයුරු සලකා බලමු.
කමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් x ද, නිමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් y ද ලෙස ගනිමු.

එවිට,

කමල් ළඟ ඇති මුදලෙන් $\frac{1}{2}$ ක් වන $\frac{1}{2}x$ හා නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් වන $\frac{1}{3}y$ එකතු කළ විට $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ ලැබේ. එය රුපියල් 20ට සමාන බැවින්

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20 \text{ ——— } ①$$ ලෙස එක් සමීකරණයක් ලැබේ.

එලෙස ම, කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නිසා

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y$$ සමීකරණය ලැබේ.

එය $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0$ ——— ② ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

සංගුණක ලෙස භාග අඩංගු සමගාමී සමීකරණ විසඳීමේ දී ප්‍රථමයෙන් එම සංගුණක, නිඛිල බවට හරවා ගෙන, විසඳීම බොහෝ විට පහසු ය. ඒ අනුව ① සමීකරණයේ සංගුණකවල හරයන්ගේ කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් සමීකරණය ගුණ කිරීමෙන්, පහසුවෙන් සංගුණක නිඛිල බවට හරවා ගත හැකි ය.

එමනිසා, ① සමීකරණය 2 හා 3 හි කු.පො.ගු. වන 6න් හා ② සමීකරණය 4 හා 6 හි කු.පො.ගු. වන 12න් ගුණ කරමු.

① × 6න්; $6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{1}{3}y = 6 \times 20$

$$\therefore \quad 3x + 2y = 120 \text{ ——— } ③$$

② × 12න්; $12 \times \frac{1}{4}x - 12 \times \frac{1}{6}y = 12 \times 0$

$$3x - 2y = 0 \text{ ——— } ④$$

දැන් ① හා ② සමීකරණ විසඳීම වෙනුවට, එයට තුල්‍ය වන ③ හා ④ විසඳීම කළ හැකි ය. එමනිසා, ③ හා ④ සමීකරණ විසඳමු.

③ + ④ $(3x + 2y) + (3x - 2y) = 120 + 0$

$$3x + 2y + 3x - 2y = 120$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

$x = 20$ ④ සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්

$$3 \times 20 - 2y = 0$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

∴ කමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 20

නිමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 30

සටහන: මෙම ගැටලුවේ දී සංගුණක නිඛිල ආකාරයට හරවා ගත් පසු සමීකරණ එකතු කිරීමෙන් y ඉවත් කොට අපි x හි අගය සෙව්වෙමු. අවශ්‍ය නම් එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයේ ආදේශයෙන් ද පිළිතුර ලබා ගත හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2 විසඳන්න:

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2 \text{ ——— } ①$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9 \text{ ——— } ②$$

මෙම සමීකරණ යුගලයෙන්, එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයට ආදේශ කොට විසඳමු.

මේ සඳහා $\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$

$$\frac{1}{6}a = -2 + \frac{1}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5}b \text{ (දෙපස ම 6න් ගුණ කිරීමෙන්) ——— } ③$$

මෙම a හි අගය ② සමීකරණයට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\frac{1}{3}(-12 + \frac{6}{5}b) + \frac{1}{4}b = 9$$

$$-4 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{4}b = 9$$

4හි හා 5 හි කු.පො.ගු. වන 20 පොදු හරය ලෙස සකසා ගෙන භාග සුළු කරමු.

$$\frac{8}{20}b + \frac{5}{20}b = 9 + 4$$

$$\frac{13}{20}b = 13$$

$$b = \frac{13 \times 20}{13}$$

$$b = 20$$

$b = 20$ ③ සමීකරණය ට ආදේශයෙන් (මෙහි දී ඕනෑ ම සමීකරණය ට ආදේශ කළ හැකි වේ.)

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5} \times 20$$

$$a = -12 + 24$$

$$a = 12$$

එනම් විසඳුම් $a = 12$ හා $b = 20$ වේ.

ඉහත සමගාමී සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම වන $a = 12$ හා $b = 20$ යන අගයන් එම සමීකරණවලට ආදේශ කිරීමෙන් එම විසඳුම සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$a = 12$ හා $b = 20$ ① සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

$$\text{වම් පැත්ත} = \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b$$

$$= \frac{1}{6} \times 12 - \frac{1}{5} \times 20$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

එනම් වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$\therefore$ $\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$ සමීකරණය, $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.

එමෙන් ම,

$a = 12$ හා $b = 20$ ② සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

වම් පැත්ත $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$

$$= \frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{4} \times 20$$

$$= 4 + 5$$

$$= 9$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

එනම් $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$ සමීකරණයද $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.

මේ අනුව $a = 12$ හා $b = 20$ නිවැරදි විසඳුම බව පැහැදිලි ය.

නිදසුන 3 විසඳන්න:

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$$

$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$ —— ①

$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$ —— ② ලෙස ගනිමු.

නිදසුන 1 හි පරිදි මෙම සමීකරණවල භාගමය සංගුණක, නිඛිල බවට පත් කර විසඳිය හැකි ය. තව ද, එක් විචල්‍යයක භාගමය සංගුණක සමාන කිරීමෙන් ද විසඳිය හැකි වේ. මේ සඳහා ② සමීකරණය 2න් ගුණ කිරීමෙන් n හි සංගුණක සමාන කර ගනිමු.

② × 2න් $\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n = 8$ —— ③

දැන්, ① හා ② සමීකරණ වෙනුවට ① හා ③ සමීකරණ විසඳිය හැකි ය.

③ − ① න් $\left(\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n\right) = 8 - 1$

$$\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n = 7$$

$$\frac{10}{6}m - \frac{3}{6}m = 7$$

$$\frac{7}{6}m = 7$$

$$7m = 7 \times 6$$

$$m = 6$$

$m = 6$ ① ට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$3 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{2}{3}n = 1 - 3$$

$$\frac{2}{3}n = -2$$

$$2n = -6$$

$$n = -3$$

එනම්, විසඳුම $m = 6$ හා $n = -3$ වේ.

පෙර විසඳූ ගැටලුවේ මෙන් ම $m = 6$ හා $n = -3$ මුල් සමීකරණවල ආදේශ කර බැලීමෙන් පිළිතුරේ නිවැරදි බව සහතික කර ගත හැකි ය.

$m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම් ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \quad \text{①}$$

වම් පැත්ත $= \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n$

$= \frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3} \times (-3)$

$= 3 - 2$

$= 1$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \quad \text{②}$$

වම් පැත්ත $= \frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n$

$= \frac{5}{6} \times 6 + \frac{1}{3} \times (-3)$

$= 5 - 1$

$= 4$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

ඒ අනුව, $m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම නිවැරදි ය.

13.1 අභ්‍යාසය

1. විසඳන්න.

(a) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b = 3$

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b = 8$

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 9$

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$

$\frac{1}{2}x - y = 1$

(d) $\frac{2}{7}p - \frac{1}{3}q = 5$

$\frac{1}{2}p - 1\frac{2}{3}q = 12$

(e) $\frac{m}{4} + \frac{5n}{3} = 36$

$\frac{3m}{8} - \frac{5n}{12} = -2$

(f) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = -1$

$4x - 5y = 22$

2. පාසලක පැවති උත්සවයක, සංග්‍රහය සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{2}$ ක්ද සැරසිලි සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් ද දැරීමට ආදිශිෂ්‍ය සංගමය විසින් එකඟ විය. ඒ අනුව ආදිශිෂ්‍ය සංගමයෙන් ලබාදුන් මුදල රුපියල් 20 000කි. සංග්‍රහ හා සැරසිලි සඳහා වැයවන ඉතිරි මුදල සුභ සාධක සංගමය මගින් දරන ලදි. ඒ අනුව සුභසාධක සංගමය රුපියල් 30 000ක් ලබා දුනි.

(i) සංග්‍රහ කටයුතු සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් x ද සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් y ලෙස ද සලකා, මෙම තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න.

(ii) එම සමගාමී සමීකරණ යුගල විසඳා, සංග්‍රහ කටයුතු හා සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.2 සාධක භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක විසඳුම් (එනම්, මූල) සොයන ආකාරය මීට පෙර ඔබ උගෙන ඇත. එවැනි උදාහරණ කීපයක් පුනරීක්ෂණය කරමු.

නිදසුන 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

$(x - 2)(x - 3) = 0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$\therefore x - 2 = 0$ හෝ $x - 3 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore x = 2$ හෝ $x = 3$

$\therefore x = 2$ හා $x = 3$ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$2x^2 + 3x - 9 = 0$ හි මූල සොයන්න.

$2x^2 + 6x - 3x - 9 = 0$

$2x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$

$(2x - 3)(x + 3) = 0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$2x - 3 = 0$ හෝ $x + 3 = 0$ විය යුතු ය.

$x = \frac{3}{2}$ හෝ $x = -3$

$x = 1\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

දැන් තරමක් සංකීර්ණ ගැටලුවක් විසඳමු.

නිදසුන 3

$\frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{3x + 2} = 1$ හි මූල සොයන්න.

මෙහි වර්ගජ සමීකරණයක් පෙනෙන්නට නැත. එහෙත්, මෙම සමීකරණය භාග රහිත සමීකරණයකට හැරවූ විට වර්ගජ සමීකරණයක් ලැබේ. ඒ සඳහා, මුලින් ම, සමීකරණයේ වම්පස පොදු හරය සලකමු (මුළු සමීකරණයම $2x - 1$හි හා $3x + 2$ හි කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් ගුණ කිරීමෙන් ද මෙය කළ හැකි ය).

$\frac{3(3x + 2) - 2(2x - 1)}{(2x - 1)(3x + 2)} = 1$ (වම් පස තනි භාගයක් ලෙස ලිවීමෙන්)

$3(3x + 2) - 2(2x - 1) = (2x - 1)(3x + 2)$ (හරස් ගුණිතයෙන්)

$9x + 6 - 4x + 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2$ (ප්‍රසාරණය කිරීමෙන්)

$6x^2 - 4x - 10 = 0$ (සුළු කිරීමෙන්)

$3x^2 - 2x - 5 = 0$ (සමීකරණයේ සියලු පද 2න් බෙදීමෙන්)

$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$

$x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$

$(3x - 5)(x + 1) = 0$

$\therefore 3x - 5 = 0$ හෝ $x + 1 = 0$ මෙම සමීකරණ

$\therefore x = \frac{5}{3}$ හෝ $x = -1$

$\therefore x = 1\frac{2}{3}$ හෝ $x = -1$

$\therefore x = 1\frac{2}{3}$ හා $x = -1$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන් කීපයක් මගින් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම පුනරීක්ෂණය කළ අපි දැන් වර්ගජ සමීකරණ භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි ගැටලුවක් පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

නිදසුන 4

අනුයාත නිඛිල දෙකක ගුණිතය 12 වේ. එම සංඛ්‍යා යුගල සොයන්න.

මෙම ගැටලුව විසඳීම සඳහා වර්ගජ සමීකරණයක් යොදා ගන්නා ආකාරය විමසා බලමු. අනුයාත සංඛ්‍යා දෙකෙන් කුඩා සංඛ්‍යාව x ලෙස ගනිමු. එවිට, අනෙක් සංඛ්‍යාව $x + 1$ වේ. ඒ අනුව,
අනුයාත සංඛ්‍යා යුගලය x හා $(x + 1)$ ලෙස ගත හැකි ය.
මෙම සංඛ්‍යා දෙකේ ගුණිතය 12 බැවින්

$x \times (x + 1) = 12$ ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

$\therefore\ x^2 + x - 12 = 0$

මෙහි වම් පස සාධක සෙවූ විට,

$(x - 3)(x + 4) = 0$ වේ.

$\therefore x - 3 = 0$ හෝ $x + 4 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore x = 3$ හෝ $x = -4$

$x = 3$ හා $x = -4$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම වේ.
$x = 3$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x + 1) = 3 + 1 = 4$ වේ.
$x = -4$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x + 1) = -4 + 1 = -3$ වේ.

මේ අනුව ගුණිතය 12 වන අනුයාත නිඛිල සංඛ්‍යා යුගල දෙකක් ඇති අතර, ඒවා "3, 4" හා "– 3, – 4" වේ.

ඉහත $x^2 + x - 12 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ විසඳුම් එම සමීකරණයට ආදේශ කර, එම විසඳුම් සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = 3$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

ව.පැ. $= x^2 + x - 12$
$= 3^2 + 3 - 12$
$= 9 + 3 - 12$
$= 12 - 12$
$= 0$

$\therefore$ ව.පැ. = දැ.පැ.

$x = -4$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

ව.පැ. $= x^2 + x - 12$
$= (-4)^2 + (-4) - 12$
$= 16 - 4 - 12$
$= 16 - 16$
$= 0$

$\therefore$ ව.පැ. = දැ.පැ.

මේ අනුව $x^2 + x - 12 = 0$ සමීකරණයේ විසඳුම් 3 හා -4 බව සනාථ වේ.

නිදසුන 5

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමක දිග එහි පළලට වඩා මීටර 5ක් දිගින් වැඩි වේ. එහි වර්ගඵලය වර්ගමීටර 150 කි.

(i) ඉඩමේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන ඉඩමේ දිග සඳහා ප්‍රකාශනයක් x ඇසුරෙන් ලියන්න.
(ii) x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(iii) එම සමීකරණය විසඳා, ඉඩමේ දිග හා පළල සොයන්න.

(i) පළල මීටර x ලෙස ගනිමු. එවිට,
දිග $= x + 5$ වේ. (සියලු මිනුම් මීටරවලින් දක්වා ඇත)

(ii) මෙම දත්ත රූපසටහනකින් නිරූපණය කළ විට වඩාත් පැහැදිලි වේ.

x | $150\ m^2$ | $x + 5$

වර්ගඵලය $=$ දිග $\times$ පළල
$= (x + 5) \times x$

$$x\,(x + 5) = 150$$

මෙය අවශ්‍ය සමීකරණය යි.

(iii) ඉහත සමීකරණය විසඳමු.

$$x\,(x + 5) = 150$$
$$x^2 + 5x - 150 = 0$$
$$(x - 10)\,(x + 15) = 0$$

$\therefore\ x - 10 = 0$ හෝ $x + 15 = 0$

$\therefore\ x = +10$ හෝ $x = -15$

$\therefore\ x = +\,10$ හා $x = -\,15$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.
එහෙත් x මගින් දිගක් නිරූපණය වන බැවින් එය සෘණ විය නොහැකි ය.
එබැවින් $x = 10$ අගය පමණක් ගැළපේ.
ඒ අනුව සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ පළල $= 10$ m ද
සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ දිග $= 15$ m ද වේ.

ඉහත x සඳහා ලැබුණු අගය දෙක ආදේශයෙන් $x\,(x + 5) = 150$ හි විසඳුම් 10 හා -15 බව සනාථ කළ හැකි ය.

ව.පැ. $= x\,(x + 5)$
$= 10\,(10 + 5)$
$= 10 \times 15$
$= 150$

$\therefore$ ව.පැ. $=$ ද.පැ.

මෙලෙස ම, $x = -15$ ද විසඳුමක් බව සනාථ කළ හැකි ය.

13.2 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $x(x+5)=0$ **(b)** $\frac{3}{4}x(x+1)=0$ **(c)** $(x-4)(x+3)=0$

(d) $x^2-2x=0$ **(e)** $\frac{x^2}{2}=3x$ **(f)** $x^2+7x+12=0$

(g) $(x-2)(2x+3)=x^2+2x+4$ **(h)** $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+1}=3$

(i) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ **(j)** $x^2-4=0$

2. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය සාධක දැනුම භාවිතයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ හා $\sqrt{5}=2.23$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2-12=0$ **(b)** $x^2-21=11$ **(c)** $x^2+17=37$

3. යම් සංඛ්‍යාවක වර්ගයෙන්, එම සංඛ්‍යාවේ දෙගුණය අඩු කළ විට පිළිතුර 15 වේ. එම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

4. අනුයාත ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 120 වේ. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

5. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරයක දිග, එහි පළලට වඩා සෙන්ටිමීටර 3කින් විශාල ය. එම ආස්තරයේ වර්ගඵලය වර්ග සෙන්ටිමීටර 88 කි. ආස්තරයේ දිගත් පළලත් සොයන්න.

6. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තණ පිටියක දිග 32 m හා පළල 20 m ද වන අතර, එය වටා පිටතින් ඒකාකාර පළලින් යුතු පාරක් ඇත. පාරේ වර්ගඵලය 285 m²ක් වේ.

(i) පාරේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන, දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) එම සමීකරණය විසඳීමෙන් පාරේ පළල සොයන්න.

7. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයේ දිග සෙන්ටිමීටර $(2x+1)$ වේ. අනෙක් පාද දෙකේ දිග පිළිවෙළින් සෙන්ටිමීටර x හා සෙන්ටිමීටර $(x+7)$ වේ. x හි අගය සොයා, ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

8. $-7, -5, -3, -1, \ldots$ යන සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද n ගණනක ඓක්‍යය 105 වේ. ශ්‍රේඪි පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්

(i) n හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඉහත සමීකරණය විසඳීමෙන් පද ගණන සොයන්න.

13.3 වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමේ දී අදාළ ප්‍රකාශනය සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් විසඳුම් සොයන අයුරු අපි දුටුවෙමු. එහෙත් $x^2 + 3x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x - 1 = 0$ වැනි වර්ගජ සමීකරණ, සාධක සෙවීම මගින් විසඳීම පහසු නො වේ. එබඳු සමීකරණවල මූල ලබා ගැනීම සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක් යොදා ගැනීම පහසු ය. එක් ක්‍රමයක් නම්, ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස සකස් කර විසඳීම යි. මෙය වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම නම් වේ.

වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට පෙර $x^2 + bx$ ප්‍රකාශනයක් වර්ගායිතයක් එනම්, පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම ඉගෙන ගත් ආකාරය සිහිපත් කරමු.

ඒ සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

පහත සඳහන් ප්‍රකාශන පූර්ණ වර්ගයක් බවට පත් කිරීමට එකතු කළ යුතු නියත පදය ලියා ඒවා වර්ගායිත ලෙස සකසන්න (පළමු කොටස සාදා ඇත).

a. $x^2 + 6x + 9 \quad = (x + 3)^2$
b. $x^2 + 8x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$
c. $x^2 - 14x + \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
d. $x^2 + 3x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$
e. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 8x + \ldots$
f. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 2ax + \ldots$
g. $(x + b)^2 = x^2 + \ldots x + b^2$
h. $(x + m)^2 = x^2 + \ldots x + m^2$

මුලින් ම, සාධක භාවිතයෙන් ද විසඳිය හැකි වර්ගජ සමීකරණයක් වර්ග පූරණයෙන් විසඳන අයුරු සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$x^2 + 2x - 3 = 0$ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x = 3$$

වම් පැත්ත පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලිවීම සඳහා x හි සංගුණකයෙන් බාගයෙහි වර්ගය වන $+ 1$ එකතු කරමු. එවිට දකුණු පසට ද $+ 1$ එකතු කළ යුතු වේ.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$
$$(x + 1)^2 = 4$$

එමනිසා

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 1 = \pm 2$$
$$x = \pm 2 - 1$$

එනම්, $x = + 2 - 1$ හෝ $x = - 2 - 1$

$x = 1$ හෝ $x = - 3$

ඒ අනුව ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $x = 1$ හා $x = - 3$ වේ.

දැන් තවත් නිදසුනක් සලකමු.

නිදසුන 2

$x^2 - 4x + 1 = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(x-2)^2 = 3$$
$$\therefore \quad x - 2 = \pm\sqrt{3}$$
$$x = 2 \pm\sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ හෝ $x = 2 - \sqrt{3}$ වේ.

$\sqrt{3}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 1.73 දී ඇතැයි ගනිමු.

$x = 2 + 1.73$ හෝ $x = 2 - 1.73$ විය යුතු ය.

$x = 3.73$ හෝ $x = 0.27$

$x = 3.73$ හා $x = 0.27$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 3

$2x^2 + 6x - 5 = 0$ විසඳා මූල සොයන්න.

මෙම සමීකරණය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස දැක්වීමේ දී x හි සංගුණකය 1 ලෙස සකසා ගැනීමෙන් වඩාත් පහසු වේ. සමීකරණය 2න් බෙදීමෙන් වර්ග පදයේ සංගුණකය 1 ලෙස පිළියෙල කර ගත හැකි ය.

$$2x^2 + 6x - 5 = 0$$
$$x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$$
$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}$$
$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+10 + 9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+19}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{19}}{2}$$

$x = \frac{+\sqrt{19} - 3}{2}$ හෝ $x = \frac{-\sqrt{19} - 3}{2}$

$\sqrt{19}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 4.36 දී ඇතැයි ගනිමු.

$$x = \frac{4.36 - 3}{2} \text{ හෝ } x = \frac{-4.36 - 3}{2}$$

$x = 0.68$ හෝ $x = -3.68$

$x = 0.68$ හා $x = -3.68$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

13.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන වර්ගජ සමීකරණ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2} = 1.41, \sqrt{3} = 1.73, \sqrt{5} = 2.23, \sqrt{6} = 2.44, \sqrt{13} = 3.6, \sqrt{17} = 4.12$, හා $\sqrt{57} = 7.54$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 8x - 2 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x = 4$

(d) $x^2 + 4x - 8 = 0$ **(e)** $x(x + 8) = 8$ **(f)** $x^2 + x = 4$

(g) $2x^2 + 5x = 4$ **(h)** $3x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+3} = 1$

13.4 සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක් විසඳීම සඳහා වඩාත් පහසු ක්‍රමයක් වන්නේ සූත්‍රය භාවිත කිරීම යි. මුලින් ම, මූල ලබා දෙන සූත්‍රය ලබා ගන්නා ආකාරය සලකා බලමු. ඇත්ත වශයෙන් ම, මෙහි දී සිදු කරන්නේ $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳීම යි.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad (a \text{ මගින් බෙදීමෙන්}) \ (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (\text{දෙපසට } \text{ම} \frac{b}{a} \text{ න් අඩක වර්ගය එකතු කිරීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (\text{වම් පස පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියා, දකුණු පස පද සැකසීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{දකුණු පස පොදු හරයක් ලෙස ලිවීමෙන්})$$

එමනිසා, $$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (පොදු හරයක් සහිත ව ලිවීමෙන්)

මේ අනුව
$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ යන සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි වේ. මෙහි ධන හා ඍණ අගයන්

දෙකට අනුරූප ව x සඳහා අගයන් (මූල) දෙකක් ලැබේ.
මෙහි a යනු x^2 පදයේ සංගුණකය ද, b යනු x පදයේ සංගුණකය ද, c යනු නියත පදය ද වේ.

නිදසුන 1

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණයෙහි,
$a = 2, b = 7, c = 3$ ආදේශයෙන්

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{4}$$

$x = \frac{-7 + 5}{4}$ හෝ $x = \frac{-7 - 5}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ හෝ $x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා මූල සොයන්න. $\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස ගන්න.

$$4x^2 - 7x + 2 = 0$$

මෙහි $a = 4, b = -7, c = 2$ ලෙස ගත හැකි ය. ($ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයට අනුව)

ඒ අනුව, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$$ ($\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස දී ඇති නිසා)

$$= \frac{7 \pm 4.12}{8}$$

$x = \frac{7 + 4.12}{8}$ හෝ $x = \frac{7 - 4.12}{8}$

$x = \frac{11.12}{8}$ හෝ $x = \frac{2.88}{8}$

$x = 1.39$ හෝ $x = 0.36$

$x = 1.39$ හා $x = 0.36$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන 3

$x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා, මූල දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව සොයන්න ($\sqrt{2} = 1.414$ ලෙස ගන්න).

$a = 1, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2 \times 1.414}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2.828}{2}$$

$x = \frac{-2 + 2.828}{2}$ හෝ $x = \frac{-2 - 2.828}{2}$

$= \frac{0.828}{2}$ $\quad x = \frac{-4.828}{2}$

$x = 0.414$ හෝ $x = -2.414$

$x = 0.41$ හා $x = -2.41$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

13.4 අභ්‍යාසය

1. සූත්‍රය භාවිතයෙන් පහත සඳහන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳා, පිළිතුර ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට තබන්න.
($\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{17} = 4.12$ හා $\sqrt{29} = 5.38$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2 - 6x - 3 = 0$ **(b)** $x^2 - 7x + 5 = 0$ **(c)** $2x^2 - x - 2 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ **(e)** $3x^2 - 4x - 7 = 0$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

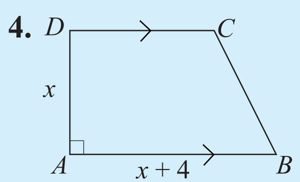
1. ධන සංඛ්‍යාවක වර්ගයෙන් එම සංඛ්‍යාවේ තුන් ගුණය අඩු කළ විට 28කි. එම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

2. අනුයාත ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 99 වේ. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

3. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තහඩු කැබැල්ලක දිග, එහි පළලට වඩා 6 cmක් වැඩි වේ. තහඩුවේ වර්ගඵලය 44 cm^2 වේ. පළල x cm ලෙස ගෙන

(i) දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) සූත්‍රය භාවිතයෙන් එම සමීකරණය විසඳා, x හි අගය ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට සොයන්න. ($\sqrt{53} = 7.28$ ලෙස ගන්න)

4. 

$ABCD$ ත්‍රපීසියමකි. එහි $AD = CD$ වේ.

(i) ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය 12 cm^2 නම් $x^2 + 2x - 12 = 0$ මගින් x හි අගය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

(ii) වර්ග පූරණයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් ඉහත (i) හි වර්ගජ සමීකරණය විසඳා, x හි අගය ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට සොයන්න.

5. අනුයාත ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා තුනක වර්ගවල ඓක්‍යය 149කි. එම සංඛ්‍යා තුනෙහි මැද සංඛ්‍යාව x යැයි ගෙන, වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගා, එය විසඳා එමගින් විශාල ම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

6. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකෙහි දිග සෙන්ටිමීටර $5x$ හා සෙන්ටිමීටර $(3x - 1)$ වේ. මෙහි වර්ගඵලය 60 cm^2 නම් x ඇසුරෙන් වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගා, එය විසඳා, එමගින් ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

7. මිනිසෙක් රුපියල් 600කට අඹ ගෙඩි ප්‍රමාණයක් මිලට ගත්තේ ය. අඹ ගෙඩියක මිල රුපියල් එකකින් අඩු වූයේ නම් ඔහුට තවත් අඹ ගෙඩි 20ක් වැඩිපුර ගත හැකි ව තිබිණි. මිලට ගත් අඹ ගෙඩි ගණන සොයන්න.

14 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සමරූපී හා සමකෝණික රූප යන්නෙහි අදහස තේරුම් ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ" යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සරල රේඛාවක් මගින් සමානුපාතික ව බෙදයි නම්, එම සරල රේඛාව, ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ" යන විලෝම ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "සමකෝණික ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ" යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික නම්, එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ" යන විලෝම ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

දිග අතර අනුපාත

A ——2 cm—— C ——3 cm—— B

$AC = 2$ cm හා $CB = 3$ cm වන සේ AB මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති AB සරල රේඛා ඛණ්ඩයක් රූපයේ දැක්වේ. C මගින් AB රේඛා ඛණ්ඩය AC හා CB ලෙස කොටස් දෙකකට බෙදී ඇත.

එවිට, AC හා CB පාද අතර අනුපාතය, ඒවායේ දිග ඇසුරෙන් මෙසේ ලිවිය හැකි ය.

$$AC : CB = 2 : 3$$

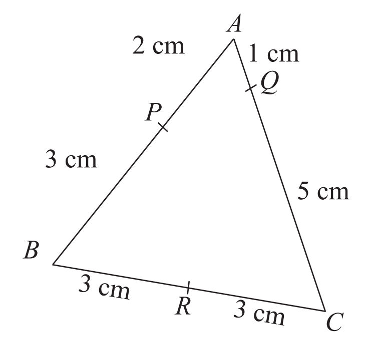
එසේ ම,

$AC : AB = 2 : 5$ ($AB = 5$ cm නිසා) ලෙස ද

$CB : AC = 3 : 2$ ලෙස ද

$CB : AB = 3 : 5$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

අනුපාතය සඳහා සම්බන්ධ කර ගන්නා පාදවල පිළිවෙළට ඒවායේ දිග අතර අනුපාතය ද ලිවිය යුතු ය. පහත රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය සලකන්න.



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් පාද මත එහි දක්වා ඇති ආකාරයට P, Q හා R ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇති විට, පහත දැක්වෙන අයුරින් අනුපාත ලිවිය හැකි ය.

(i) $AP : PB = 2 : 3$, $AP : AB = 2 : 5$, $PB : AP = 3 : 2$

(ii) $AQ : QC = 1 : 5$, $AQ : AC = 1 : 6$, $QC : AQ = 5 : 1$

(iii) $BR : RC = 3 : 3 = 1 : 1$, $BR : BC = 3 : 6 = 1 : 2$

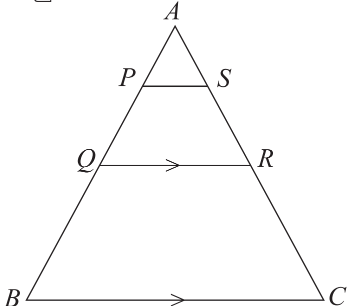
අනුපාත ඇසුරෙන් භාග ද ලිවිය හැකි බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු. ඒ අනුව, ඉහත දැක්වෙන $AQ : QC = 1 : 5$ යන්න $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{5} = 0.2$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

14.1 ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක්, ඉතිරි පාදයට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් බෙදීම

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් කැපී යන සේ ඉතිරි පාදයට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් එම පාද දෙක බෙදෙන අනුපාත පිළිබඳ ව සොයා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙමු.

ක්‍රියාකාරකම

- $AB = 6$ cm ද, ඉතිරි පාද දෙක ඕනෑ ම දිගක් ද වන පරිදි ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න.
- $AP = 2$ cm හා $AQ = 3$ cm වන පරිදි P හා Q ලක්ෂ්‍ය දෙක, AB මත ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් BCට සමාන්තර රේඛාවක් Q හරහා ඇඳ, එය AC රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යය R ලෙස නම් කරන්න.



- AR හා RC මැන ගන්න.
- BC ට සමාන්තර තවත් රේඛාවක් P හරහා පෙර පරිදි ම ඇඳ, එය AC රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය S ලෙස නම් කරන්න.
- AS හා SC මැන ගන්න.
- දැන් පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

අවස්ථාව	AB පාදයේ කොටස් අතර අනුපාතය	AC පාදයේ කොටස් අතර අනුපාතය	අනුපාත දෙක අතර සම්බන්ධතාව
Q හරහා සමාන්තර රේඛාව	$\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{AR}{RC} =$	
P හරහා සමාන්තර රේඛාව	$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{4} = 0.5$	$\frac{AS}{SC} =$	

- මේ ආකාරයට, සෘජුකෝණික හා මහා කෝණික ත්‍රිකෝණ සඳහා ද, පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක බෙදී යන අනුපාත අතර සම්බන්ධතාව පරීක්ෂා කරන්න.

ඔබට ලැබුණු ප්‍රතිඵල පහත දැක්වෙන වගන්තිය සමඟ ගැළපේ දැයි බලන්න.

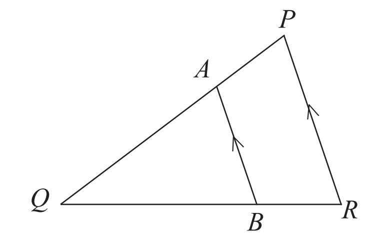
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක බෙදෙන්නේ ද සමාන අනුපාත ඇති ව යි.

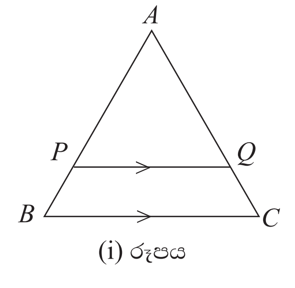
ඉහත ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය, ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවක් එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදයි.

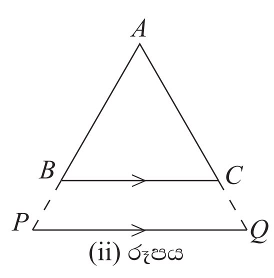
නිදසුනක් ලෙස, රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ, PR පාදයට සමාන්තර ව AB ඇඳ තිබේ.
එවිට, ප්‍රමේයය අනුව,

(i) $QA : AP = QB : BR$ එනම්, $\frac{QA}{AP} = \frac{QB}{BR}$ වේ.

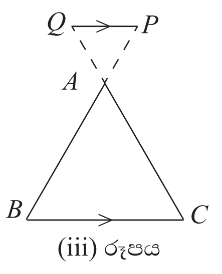




(i) රූපය



(ii) රූපය



(iii) රූපය

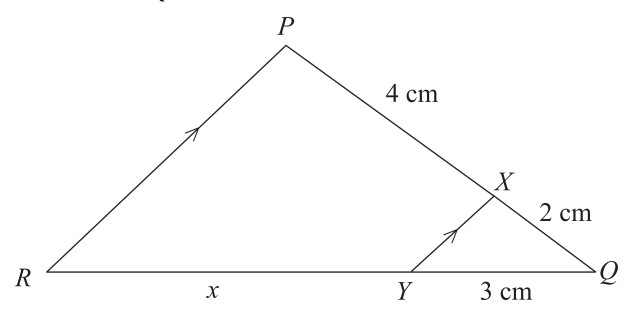
ඉහත (i) රූපයේ AB හා AC පාද අභ්‍යන්තර ව බෙදී යන සේ, BCට සමාන්තර ව PQ ඇඳ ඇත. එහෙත්, (ii) හා (iii) රූපවල BCට සමාන්තර වූ PQ රේඛාව, ත්‍රිකෝණයේ දික් කළ අනෙක් පාද දෙක P හා Q හි දී හමු වේ. මෙවැනි අවස්ථාවල දී PQ මගින් AB හා AC පාද බාහිර ව ඡේදනය වේ යැයි කියනු ලැබේ. මෙසේ එක් එක් පාදය බාහිරින් හෝ අභ්‍යන්තරයෙන් හෝ බෙදනු ලැබුව ද, ඉහත ප්‍රමේයය වලංගු වේ. එනම්,

ඉහත රූප තුන ම සඳහා $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය යොදා ගෙන කරන ලද ගණනය කිරීම් ඇතුළත් පහත නිදසුන් බලන්න.

නිදසුන 1

PQR ත්‍රිකෝණයේ, PR පාදයට සමාන්තර ව XY ඇඳ තිබේ. $PX = 4$ cm ද $XQ = 2$ cm, $YQ = 3$ cm ද නම්, RY හි දිග සොයන්න.



RY හි දිග x ලෙස ගනිමු.
එවිට, PRට සමාන්තර ව XY ඇඳ ඇති නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$\frac{RY}{YQ} = \frac{PX}{XQ}$$

එනම් $$\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$$

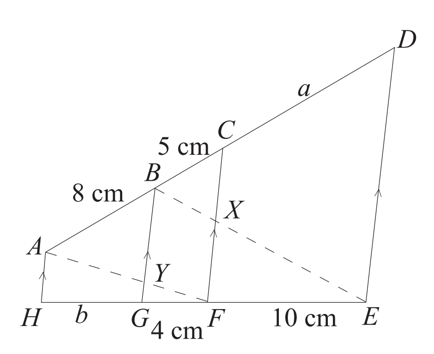
$$\therefore \quad 2x = 4 \times 3$$

$$\therefore \quad x = 6$$

$\therefore$ RY හි දිග 6 cm වේ.

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව a හා b මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



මුලින් ම BE යා කරමු.
BED ත්‍රිකෝණයේ, $DE//CX$ නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව CX මගින්, BD හා BE පාද සමානුපාතික ව බෙදේ.

එනම්, $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BX}{XE}$

එනම්, $\dfrac{5}{a} = \dfrac{BX}{XE}$ ——— ①

දැන්, BGE ත්‍රිකෝණයේ, $BG//XF$ නිසා ප්‍රමේයයට අනුව, EB හා EG පාද XF මගින් සමානුපාතික ව බෙදේ.

එනම්, $\dfrac{BX}{XE} = \dfrac{GF}{FE}$

එමනිසා, $\dfrac{BX}{XE} = \dfrac{4}{10}$ ——— ②

① හා ② සමීකරණ දෙකෙන්

$$\frac{5}{a} = \frac{4}{10}$$

එනම්, $4a = 50$

$$\therefore \quad a = \frac{50}{4}$$

$$= \underline{\underline{12.5 \text{ cm}}}$$

ඉහත ආකාරයට ම AF යා කිරීමෙන්,

ACF ත්‍රිකෝණයේ, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AY}{YF}$

$\dfrac{8}{5} = \dfrac{AY}{YF}$ ——— ③

AHF ත්‍රිකෝණයේ, $\dfrac{AY}{YF} = \dfrac{HG}{GF}$

$\dfrac{AY}{YF} = \dfrac{b}{4}$ ——— ④

③ හා ④ සමීකරණ දෙකෙන්,

$$\frac{b}{4} = \frac{8}{5}$$

$$5b = 32$$

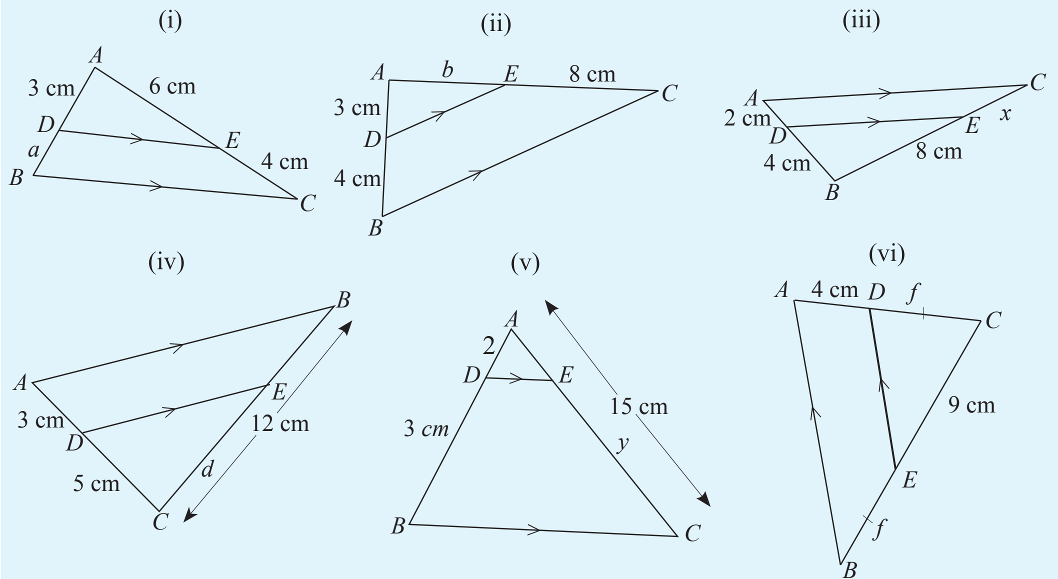
$$\therefore \quad b = \frac{32}{5}$$

$$= \underline{\underline{6.4 \text{ cm}}}$$

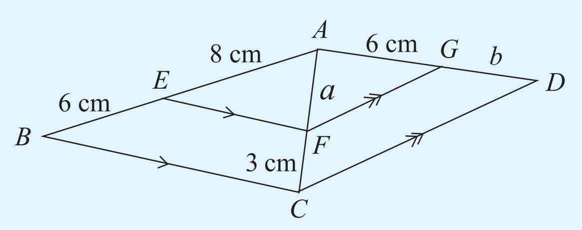
දැන් පහත අභ්‍යාසයේ ඇතුළත් ගණනය කිරීම්වල යෙදෙමින්, උගත් කරුණු තහවුරු කර ගන්න.

14.1 අභ්‍යාසය

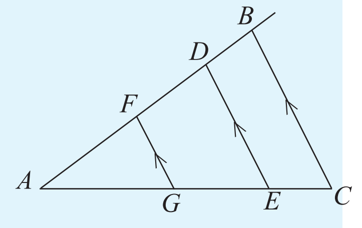
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූප සටහනේ සමහර සරල රේඛා ඛණ්ඩවල දිග අඥාත මගින් දක්වා ඇත. එම අඥාත මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



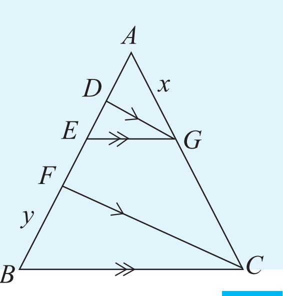
2. දී ඇති රූපයේ දී ඇති තොරතුරු හා මිනුම් අනුව, a හා b මගින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



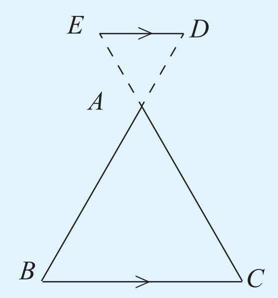
3. දී ඇති රූපයේ $FG // DE // BC$ වේ. $AF = 6$ cm, $DB = 3$ cm, $AG = 8$ cm හා $GE = 8$ cm වේ. FD හා EC රේඛා ඛණ්ඩවල දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.



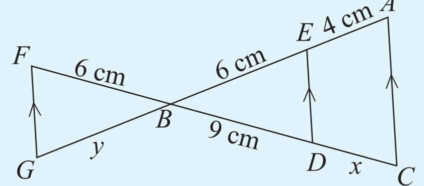
4. දී ඇති $DG // FC$ හා $EG // BC$ වේ. $AD = 6$ cm, $DE = 4$ cm, $EF = 5$ cm හා $GC = 18$ cm වේ. x හා y මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



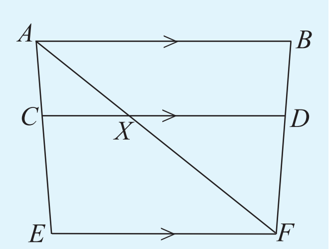
5. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ දික් කරන ලද BA හා CA පාද BCට සමාන්තර ව ඇඳි ED රේඛාවෙන් බාහිරින් බෙදී ඇත. $AE = 2$ cm, $AD = 3$ cm හා $AC = 4$ cm වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග x මගින් දැක්වේ.
   (i) හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.
   $DB : .... = ... : EA$
   (ii) x මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



6. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව x හා y මගින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



7. දී ඇති රූපයේ $AB//CD//EF$ වේ. $AC = 3$ cm, $CE = 5$ cm හා $BF = 12$ cm වේ. BD හා DF හි අගයන් සොයන්න.



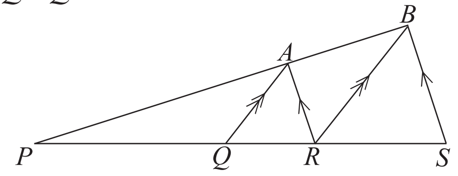
8. ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{C}A$ හි සමච්ඡේදකයට AB පාදය Xහි දී හමු වේ. $PX = PC$ වන සේ, P ලක්ෂ්‍යය, BC මත පිහිටා තිබේ. $PX = 9$ cm, $BX = 5$ cm හා $AX = 6$ cm නම් BC පාදයේ දිග සොයන්න.

14.2 ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ව බෙදීම තවදුරටත්

"ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවක් එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදයි" යන ප්‍රමේයය යොදා ගෙන අනුමේයන් සාධනය කිරීම පිළිබඳ ව මෙම කොටසින් සාකච්ඡා කරමු.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ, $PQRS$ හා PAB සරල රේඛා වේ. $BS//AR$ සහ $BR//AQ$ වේ. $PR : RS = PQ : QR$ බව සාධනය කරන්න.



සාධනය : PBR ත්‍රිකෝණයේ, BR පාදයට AQ සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PA : AB = PQ : QR$ ——— ①

PBS ත්‍රිකෝණයේ, BS පාදයට AR සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

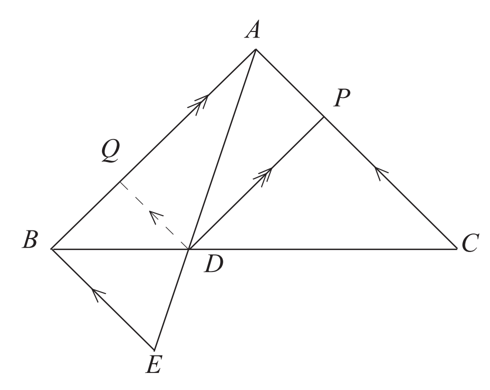
$PA : AB = PR : RS$ ——— ②

① හා ② න්

$PR : RS = PQ : QR$

නිදසුන 2

D යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කළ AD රේඛාව E හි දී හමු වන සේ, AC ට සමාන්තර ව, BE ඇඳ තිබේ. AB ට සමාන්තර ව D සිට ඇඳි රේඛාවට P හි දී AC හමු වේ. $CP : PA = AD : DE$ බව සාධනය කරන්න.



මෙහි දී, ඉහත නිදසුනේ පරිදි ම, ත්‍රිකෝණ යුගලයකුත්, එම එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ පාදයකට සමාන්තර රේඛාවකුත් තෝරා ගත යුතු ය. මේ සඳහා ABE ත්‍රිකෝණයත් ABC ත්‍රිකෝණයත් තෝරා ගනිමු. එසේ තෝරා ගන්නේ එම ත්‍රිකෝණ දෙකට ම පොදු පාදයක් තිබීම නිසා ය.

එහෙත් ABE ත්‍රිකෝණයේ පාදයකට සමාන්තර රේඛාවක් නැත. එමනිසා, එවැනි රේඛාවක් මුලින් ම නිර්මාණය කර ගනිමු.

නිර්මාණය : AB පාදය Q හි දී හමු වන සේ, BE ට සමාන්තර ව DQ ඇඳීම. (මෙවිට, AC, QD හා BE රේඛා එකිනෙකට සමාන්තර වේ.)

සාධනය :

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AB පාදයට PD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$CP : PA = CD : DB$ ——— ①

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AC පාදයට QD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$AQ : QB = CD : DB$ ——— ②

ABE ත්‍රිකෝණයේ, BE පාදයට QD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

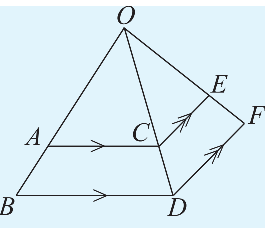
$AQ : QB = AD : DE$ ——— ③

①, ② හා ③ සමීකරණවලින්,

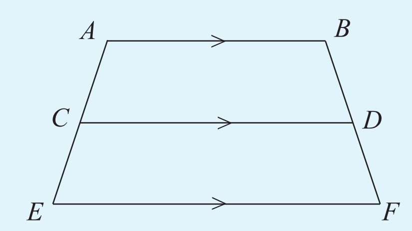
$CP : PA = CD : DB = AQ : QB = AD : DE$ ලෙස ලැබේ.

$\therefore \quad CP : PA = AD : DE$

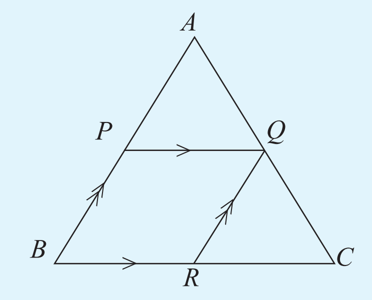
14.2 අභ්‍යාසය



1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $OA : AB = OE : EF$ බව පෙන්වන්න.



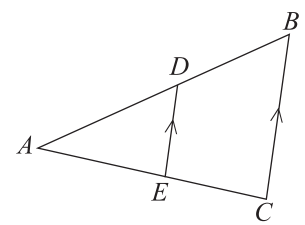
2. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $AC : CE = BD : DF$ බව සාධනය කරන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $AP : PB = BR : RC$ බව සාධනය කරන්න.

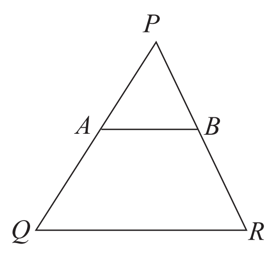
4. PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR පාදය මත A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. PR ට සමාන්තර ව, A හරහා ඇඳි රේඛාව PQ පාදය B හි දී හමු වේ. AB රේඛාව C හි දී ද, PQ රේඛාව D හි දී ද කැපී යන සේ, R සිට RCD රේඛාව ඇඳ ඇත. $D\hat{B}C = B\hat{C}D$ නම්, $\frac{QA}{AR} = \frac{QB}{CR}$ බව සාධනය කරන්න.

14.3 ත්‍රිකෝණයක ඕනෑ ම පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද සමානුපාතික ව බෙදීමට සම්බන්ධ ප්‍රමේයයේ විලෝමය



ABC ත්‍රිකෝණයේ, BC පාදයට සමාන්තර ව ඇඳි DE රේඛාවෙන්, AB පාදය හා AC පාදය බෙදෙන්නේ එක ම අනුපාතයෙන් බව ඉහත ප්‍රමේයයෙන් නිගමනය වේ.

එනම්, $BC//DE$ නිසා, $AD : DB = AE : EC$ වේ. එම ප්‍රමේයයේ විලෝමය රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණය අනුව තේරුම් ගනිමු.



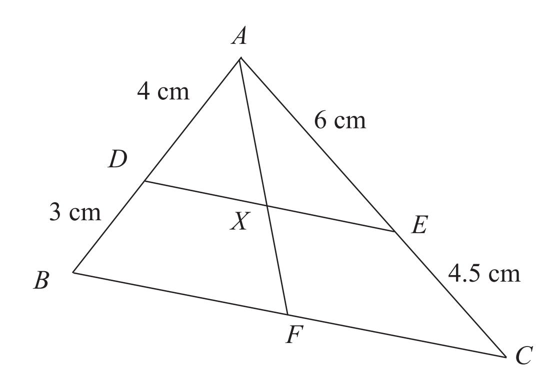
මෙහි PQ හා PR පාද දෙක AB රේඛාවෙන් ඡේදනය වී ඇත. එක් එක් පාදයේ වෙන් වූ කොටස් අතර අනුපාත $PA : AQ$ හා $PB : BR$ වේ.

මෙම අනුපාත දෙක සමාන වේ නම්, එනම් $PA : AQ = PB : BR$ වේ නම් එවිට, එම පාද දෙක ඡේදනය කරන රේඛාව වන AB, ඉතිරි පාදය වන QR පාදයට සමාන්තර වේ. මෙය, පාඩමේ මුලින් උගත් ප්‍රමේයයේ විලෝමය යි. එම ප්‍රතිඵලය මෙසේ ප්‍රමේයයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය.

ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය:
සරල රේඛාවක් මගින් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ව බෙදේ නම්, එම සරල රේඛාව, ත්‍රිකෝණයේ ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ.

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් හා අනුමේයයන් සාධනය කිරීම් ඇතුළත් නිදසුන් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1



රූපයේ දී ඇති දත්ත අනුව $AX : XF$ හි අගය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට, $AD : DB = 4 : 3$ ද

$$AE : EC = 6 : 4.5 = 4 : 3 \text{ ද නිසා}$$

$$AD : DB = AE : EC \text{ වේ.}$$

$\therefore$ AB හා AC රේඛා DE රේඛාවෙන් සමානුපාතික ව බෙදී ඇත.

$\therefore$ ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව $DE//BC$ වේ.

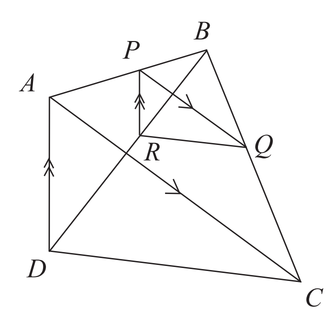
එවිට, ABF ත්‍රිකෝණයේ $DX//BF$ නිසා,

$AD : DB = AX : XF$

$AD : DB = 4 : 3$ නිසා,

$AX : XF = \underline{\underline{4 : 3}}$

නිදසුන 2



P ලක්ෂ්‍යය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AB පාදය මත පිහිටා ඇත. AC ට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට BC පාදය Q හි දී ද AD ට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට BD රේඛාව R හි දී ද හමු වේ. $RQ//DC$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය :

ABD ත්‍රිකෝණයේ, AD පාදයට PR සමාන්තර නිසා,

$BP : PA = BR : RD$ ——①

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AC පාදයට PQ සමාන්තර නිසා,

$BP : PA = BQ : QC$ ——②

① හා ② සමීකරණවලින්

$BR : RD = BQ : QC$ ලෙස ලැබේ.

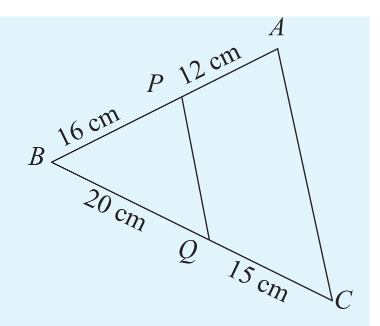
$\therefore$ BDC ත්‍රිකෝණයේ BD හා BC පාද RQ රේඛාවෙන් සමානුපාතික ව බෙදී ඇත.

$\therefore$ $RQ//DC$ (ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව)

පහත අභ්‍යාස සඳහා ඉහත දක්වා ඇති විලෝම ප්‍රමේයය යොදා ගන්න.

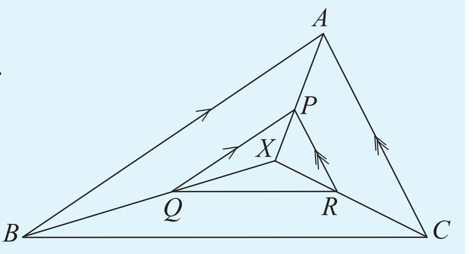
14.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව AC, PQ ට සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

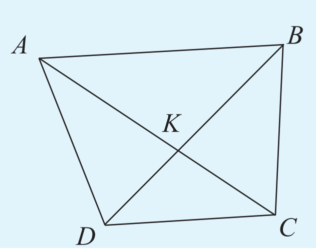


2. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AP : PB = AQ : QC$ වන සේ, AB පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය ද, AC පාදය මත Q ලක්ෂ්‍යය ද පිහිටා ඇත. $Q\hat{P}B + P\hat{B}C = 180^\circ$ ක් බව සාධනය කරන්න.

3. දී ඇති රූපයේ $AC//PR$ හා $AB//PQ$ වේ. $BC//QR$ බව සාධනය කරන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC හා BD විකර්ණ K හි දී කැපේ. $AK = 4.8$ cm, $KC = 3.2$ cm, $BK = 3$ cm, $KD = 2$ cm නම්, DC, AB ට සමාන්තර බව පෙන්වන්න. (ඉඟිය: KDC ත්‍රිකෝණයේ, දික්කළ DK හා දික්කළ CK මත A හා B ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇතැයි සලකන්න.)



5. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. O යනු AD මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. දික්කළ BO රේඛාව P හි දී AC ද, දික්කළ CO රේඛාව Q හි දී AB ද ඡේදනය කරයි. $OD = DR$ වන සේ, AD රේඛාව R තෙක් දික් කර ඇත.

(i) $BRCO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

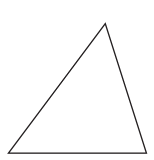
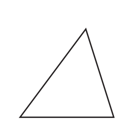
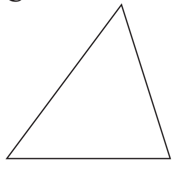
(ii) $AQ : QB = AO : OR$ බව

(iii) $QP//BC$ බව

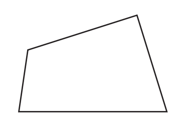
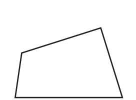
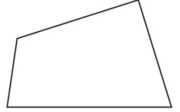
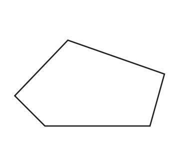
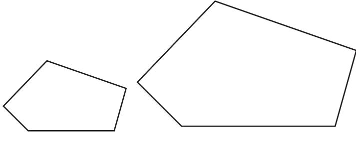
සාධනය කරන්න.

14.4 සමරූපී හා සමකෝණී රූප

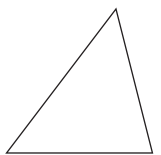
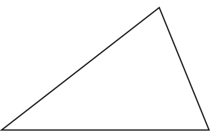
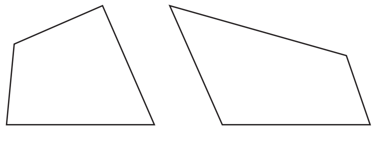
පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ තුන දෙස විමසිලිමත් ව බලන්න.

මෙම ත්‍රිකෝණ තුන එක ම "හැඩයේ" ත්‍රිකෝණ ලෙස අපි සාමාන්‍ය ව්‍යවහාරයේ දී හඳුන්වන්නෙමු. පහත රූපවල දැක්වෙන්නේ එක ම "හැඩයේ" චතුරස්‍ර තුනක් හා එකම "හැඩයේ" පංචාස්‍ර තුනකි.

එහෙත්, පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ යුගලය මෙන් ම චතුරස්‍ර යුගලය ද එකම හැඩයේ නොවන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

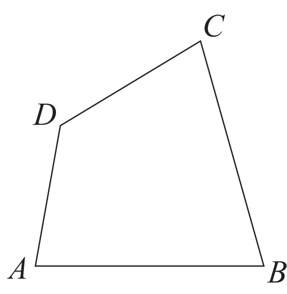




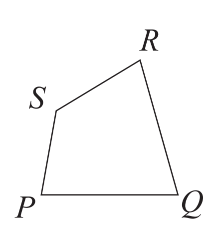
මෙහි දී "හැඩය" යන්නෙන් අදහස් වන දෑ කුමක් දැයි ඔබ සිතුවා ද? ගණිතයේ දී සියල්ල හැකි තාක් නිවැරදි ව අර්ථ දැක්වීම කළ යුතු ය. එමනිසා, "හැඩය" යන්නට නිවැරදි අර්ථයක් දී ම අවශ්‍ය ය. සාමාන්‍ය ව්‍යවහාරයේ යෙදෙන "එක ම හැඩයේ" යන්නට ගණිතයේ යෙදෙන පදය "සමරූපී" යන්න යි. මෙහි දී බහු-අස්‍රවල සමරූපී බව පිළිබඳ පමණක් සලකා බලමු.

බහු-අස්‍ර දෙකක් සමරූපී වේ යැයි කියනු ලබන්නේ එම බහු-අස්‍ර දෙකෙහි

1. එක් බහුඅස්‍රයක කෝණ අනෙක් බහුඅස්‍රයේ කෝණවලට සමාන වේ නම් හා
2. බහුඅස්‍ර දෙකෙහි අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ නම් ය.

නිදසුනක් ලෙස පහත දැක්වෙන $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර දෙක සලකන්න.





එම චතුරස්‍ර දෙකෙහි,

$$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}, \hat{D} = \hat{S}$$ නම් හා

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$ නම්

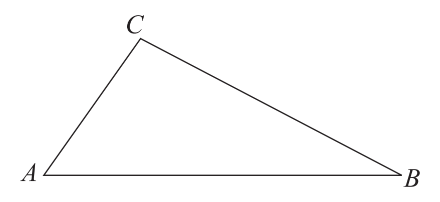
එවිට $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර දෙක සමරූපී වේ.

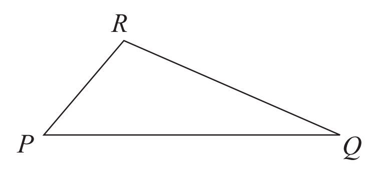
මෙම පාඩමේ දී අප වැඩිදුරට හැදෑරීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ සමරූපී ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ ව ය.

පහත දැක්වෙන ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}$ ද

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ද වේ නම් එවිට, අර්ථ දැක්වීම අනුව එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වේ.

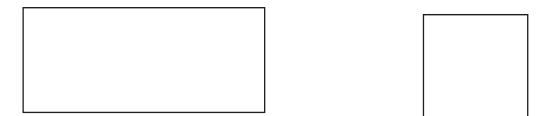




එසේ නමුත්, ත්‍රිකෝණවල සමරූපීතාව සම්බන්ධ ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ඇත. එය නම්, ත්‍රිකෝණ දෙකක කෝණ සමාන නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වීම යි. එය වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, ත්‍රිකෝණ දෙකක කෝණ සමාන නම්, එවිට එම ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි අනුරූප පාද සමානුපාතික ද වේ. ඒ අනුව, ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී වීම සඳහා එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ කෝණ සමාන දැයි පරීක්ෂා කිරීම ප්‍රමාණවත් ය. නිදසුනක් ලෙස, ඉහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි $\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \hat{Q}$ හා $\hat{C} = \hat{R}$ නම් එවිට $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය ත්‍රිකෝණ නොවන බහු-අස්‍ර සඳහා සත්‍ය නොවේ. නිදසුනක් ලෙස, පහත දැක්වෙන චතුරස්‍ර දෙකෙහි කෝණ සමාන වේ. ඒවා සියල්ල ම 90° බැගින් වේ. එයින් එකක්

ඍජුකෝණාස්‍රයක් වන අතර, අනෙක සමචතුරස්‍රයකි. එබැවින්, ඒවායේ පාද සමානුපාතික විය නොහැකි ය. එමනිසා, එම චතුරස්‍ර දෙක සමරූපී නො වේ.



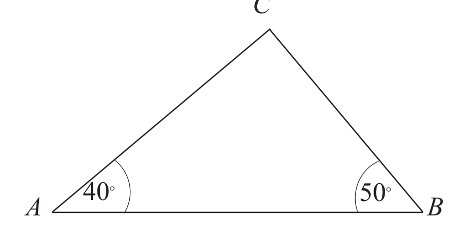
බහු-අස්‍ර දෙකක කෝණ සමාන නම්, එවිට එම බහු-අස්‍ර දෙක සමකෝණී යැයි කියනු ලැබේ. ඉහත සාකච්ඡාවට අනුව, සමකෝණී ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී ද වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය, සාධනයකින් තොර ව, ප්‍රමේයයක් ලෙස අපි භාවිතා කරමු.

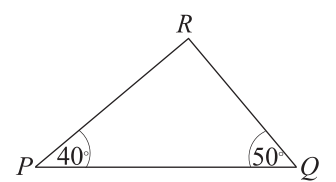
සමකෝණී ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමකෝණී වේ නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය වඩාත් හොඳින් වටහා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- කෝණමානය භාවිතයෙන්, කෝණ 40°, 50° හා 90° වන, ප්‍රමාණයෙන් එකිනෙකට වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් අඳින්න. ඒවා පහත දැක්වෙන පරිදි, ABC හා PQR ලෙස නම් කරන්න.





- ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද අතර අනුපාත (භාග ආකාරයෙන්) සොයන්න; එනම්, $\frac{AB}{PQ}$, $\frac{BC}{QR}$ හා $\frac{CA}{RP}$ යන අගයන් වෙන වෙන ම සොයන්න.
- ඉහත අගයන් තුන සමාන දැයි පරීක්ෂා කරන්න (මිනුම්වල දී ඇති වන දෝෂ නිසා ඔබට ලැබෙන අගයන්වල සුළු දෝෂ තිබිය හැකි ය.)

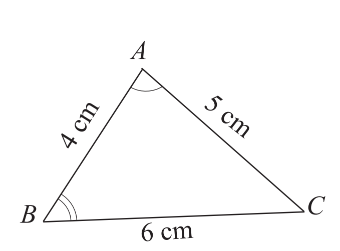
ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව, සමකෝණී ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වන බව, එනම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වන බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත.

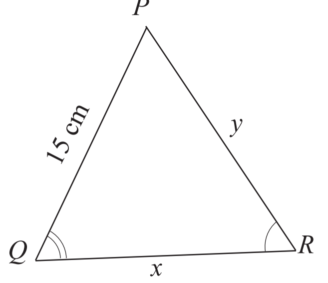
සටහන:

1. ත්‍රිකෝණ දෙකක් සඳහා සමරූපී හා සමකෝණී යන පදවලට එක ම අදහස ඇත.
2. අංගසම වන ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී වන බව පැහැදිලි ය.එහෙත්, සමරූපී ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම නොවිය හැකි ය.
3. ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකකට සමාන නම් ඉතිරි කෝණ දෙක ද සමාන වේ. එයට හේතුව ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක කෝණ සියල්ලෙහි එකතුව 180° වීම යි. එමනිසා, ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමකෝණී වීම සඳහා, එක ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක්, අනෙකෙහි කෝණ දෙකකට සමාන වීම ප්‍රමාණවත් ය.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ, $\hat{A} = \hat{R}$ හා $\hat{B} = \hat{Q}$ වේ. PQR ත්‍රිකෝණයේ x හා y මගින් දැක්වෙන අගයයන් සොයන්න.





ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$\hat{A} = \hat{R}$ හා $\hat{B} = \hat{Q}$

$\therefore \quad \hat{C} = \hat{P}$ (ත්‍රිකෝණ අභ්‍යන්තර කෝණ ඓක්‍යය 180° නිසා)

$\therefore$ ABC හා PQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

එවිට; $\dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AB}{QR}$

$$\therefore \quad \frac{6}{15} = \frac{4}{x}$$

$6x = 15 \times 4$ (හරස් ගුණිතය ගත් විට)

$$\therefore \quad x = \frac{15 \times 4}{6}$$

$$= 10$$

$\therefore x = 10$ cm වේ.

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \quad \frac{6}{15} = \frac{5}{y}$$

$$6y = 15 \times 5$$

$$y = \frac{15 \times 5}{6}$$

$$= 12.5$$

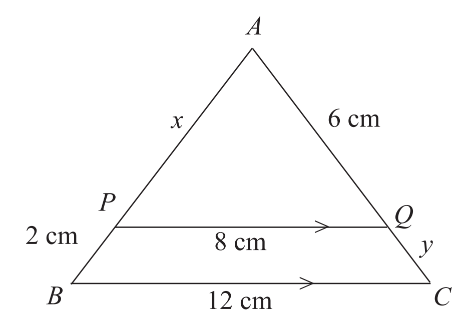
$\therefore \quad y = 12.5$ cm වේ.

නිදසුන 2

ABC ත්‍රිකෝණයේ, *BC* පාදයට සමාන්තර ව *PQ* ඇඳ තිබේ.

(i) *ABC* හා *APQ* සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව පෙන්වන්න.

(ii) *x* හා *y* මගින් දැක්වෙන අගය සෙන්ටිමීටරවලින් සොයන්න.



(i) *ABC* හා *APQ* ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$A\hat{B}C = A\hat{P}Q$ (අනුරූප කෝණ, $BC//PQ$)

$A\hat{C}B = A\hat{Q}P$ (අනුරූප කෝණ, $BC//PQ$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකටම පොදුයි.

$\therefore$ *ABC* හා *APQ* සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

(ii) *ABC* හා *APQ* සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක් නිසා ප්‍රමේයයට අනුව අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

$$\therefore \frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{AP}$$

$$\therefore \frac{12}{8} = \frac{x+2}{x}$$

$$12x = 8\,(x+2)$$

$$12\,x = 8x + 16$$

$$12\,x - 8x = 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

$\therefore x = 4$ cm වේ.

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{AQ}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{6+y}{6}$$

$$8\,(6+y) = 6 \times 12$$

$$48 + 8y = 72$$

$$8y = 72 - 48$$

$$8y = 24$$

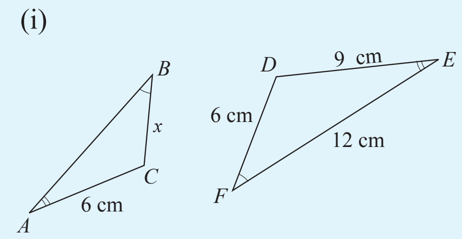
$$y = 3$$

$\therefore y = 3$ cm වේ.

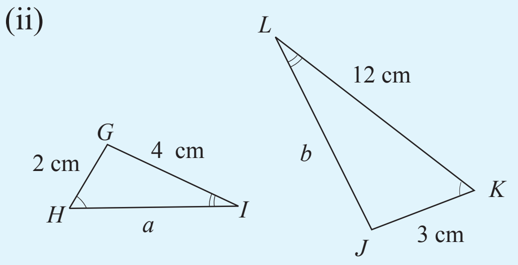
14.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණ යුගලයේ අඥාත මගින් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

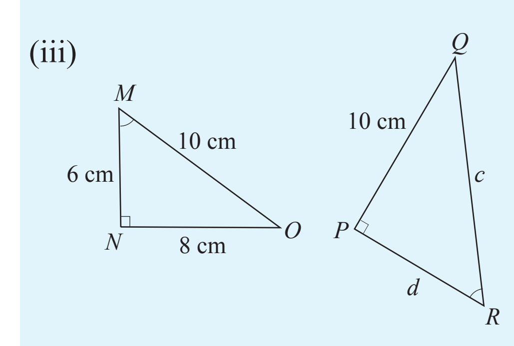
(i)



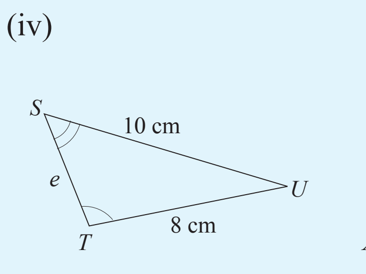
(ii)

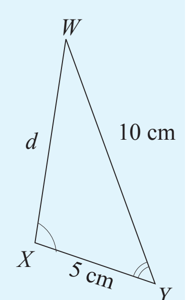


(iii)



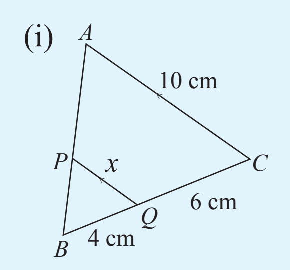
(iv)



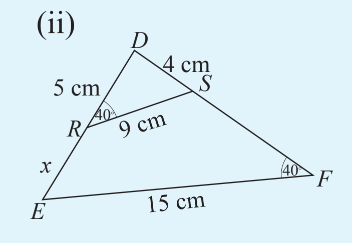


2. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ ඇතුළත් ත්‍රිකෝණ යුගලය සමකෝණික බව පෙන්වා, එහි අඥාත මගින් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

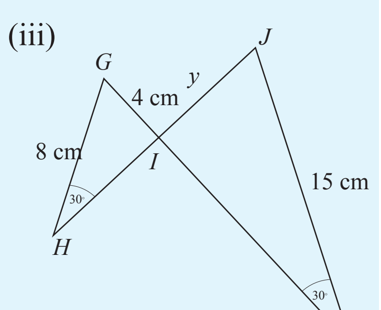
(i)



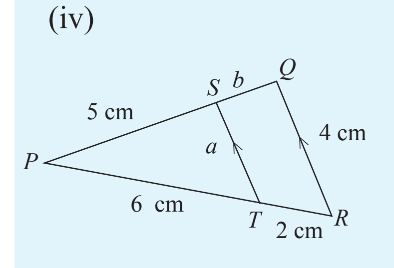
(ii)



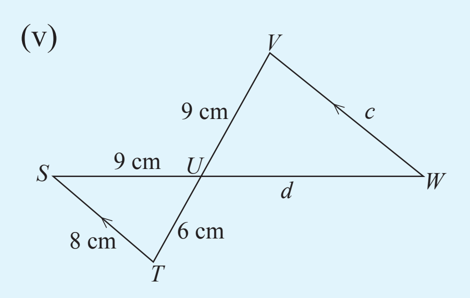
(iii)



(iv)



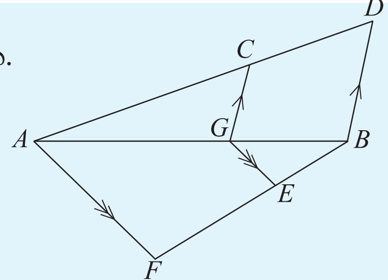
(v)



3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව

(i) සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල දෙකක් නම් කරන්න.

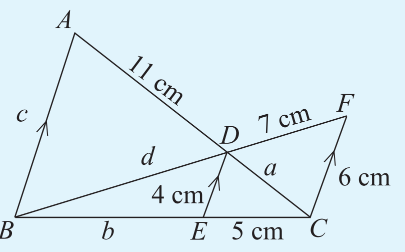
(ii) $BD = 9$ cm, $GC = 6$ cm, $AG = 12$ cm, $GE = 2$ cm නම්, GB දිග හා AF දිග සොයන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව

(i) සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල තුනක් නම් කරන්න.

(ii) a, b, c හා d මගින් දැක්වෙන රේඛා ඛණ්ඩවල දිග සොයන්න.



අප මීළඟට විමසා බලන්නේ ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය පිළිබඳ ව යි. එනම්, ත්‍රිකෝණ දෙකක පාද සමානුපාතික නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණී වේ ද යන්න පිළිබඳ ව යි. මෙම විලෝමය ද සත්‍ය ප්‍රතිඵලයක් වේ.

තව ද,

ත්‍රිකෝණයක පාද තුන, තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමානුපාතික නම්, එවිට එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය වඩාත් හොඳින් වටහා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- $AB = 2.5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 3.5$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm හා $PR = 7$ cm වූ PQR ත්‍රිකෝණය ද නිර්මාණය කරන්න.
- $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}, \frac{AC}{PR}$ හි අගයයන් අතර සම්බන්ධතාව පරීක්ෂා කරන්න.
- එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන වෙන වෙන ම මැන ගන්න.
- ඒ අනුව, ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ කුමන වර්ගයේ ත්‍රිකෝණ ද?

එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ අනුරූප පාද අතර අනුපාත සමාන බවත් ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන PQR ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුනට සමාන වන බවත්, ක්‍රියාකාරකමෙන් දැක ගත හැකි ය.

මෙම ප්‍රතිඵලය මීට පෙර උගත් සමකෝණික ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයයේ විලෝමය ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: එක් ත්‍රිකෝණයක පාද තුන, තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමානුපාතික වේ නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

නිදසුන 1

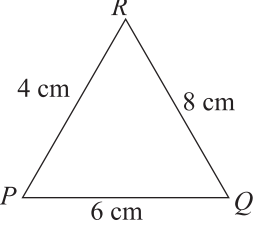
රූපයේ දී ඇති පාදවල දිග අනුව, ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න. එකිනෙකට සමාන වන කෝණ යුගල නම් කරන්න.

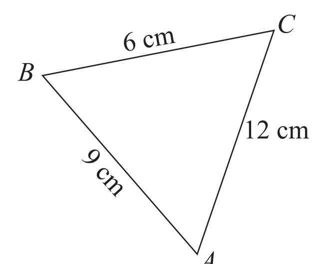
ත්‍රිකෝණ දෙකේ දී ඇති පාද දිග අනුව,
අනුපාත ලියූ විට;

(i) $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{RQ}{CA} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

(iii) $\dfrac{PR}{BC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$





මෙම අනුපාත සමාන නිසා, ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව, PQR හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික වේ.

PQR ත්‍රිකෝණයේ PQට සම්මුඛ කෝණය $\hat{R}$

PRට සම්මුඛ කෝණය $\hat{Q}$

QRට සම්මුඛ කෝණය $\hat{P}$

ABC ත්‍රිකෝණයේ ABට සම්මුඛ කෝණය $\hat{C}$

BCට සම්මුඛ කෝණය $\hat{A}$

ACට සම්මුඛ කෝණය $\hat{B}$

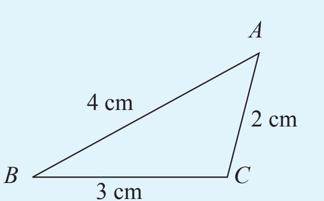
$$\therefore \ \hat{P} = \hat{B}, \hat{Q} = \hat{A}, \hat{R} = \hat{C}$$

"පාද අතර අනුපාත සමාන ත්‍රිකෝණ සමකෝණික වේ." යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

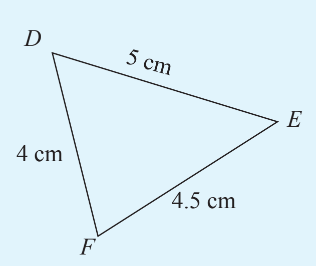
14.5 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන මිනුම් සහිත ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අතරින්, සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල තුනක් තෝරන්න.

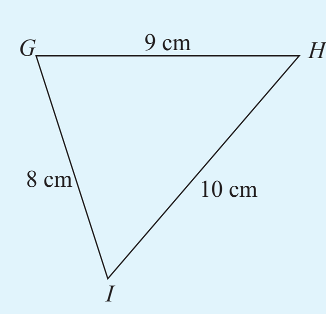
(i)



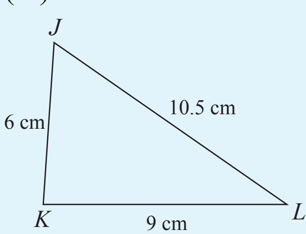
(ii)



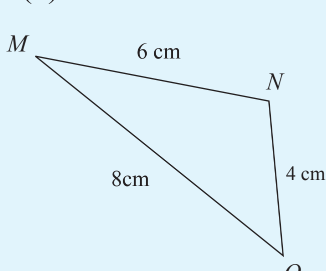
(iii)



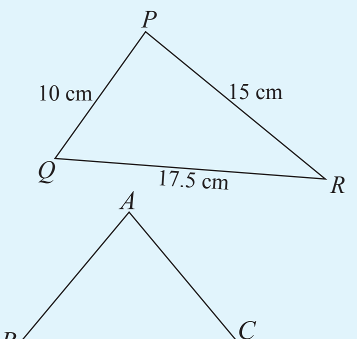
(iv)



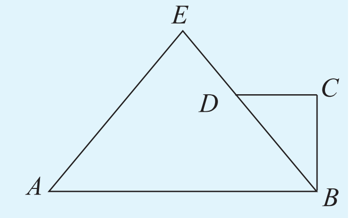
(v)



(vi)



2. දී ඇති රූපයේ $\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{ED}=\frac{BC}{DF}$ වේ. $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ හා $A\hat{C}B$ කෝණ එක එකක් සඳහා සමාන වෙනත් කෝණයක් ලියා දක්වන්න.

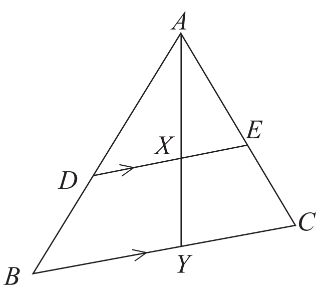


3. දී ඇති රූපයේ $AB = 20$ cm ද, $BC = 6$ cm ද $CD = 4$ cm ද $DB = 8$ cm ද $DE = 2$ cm ද $AE = 15$ cm ද වේ. $AB//DC$ බව පෙන්වන්න. තවද, දික්කළ CDට F හි දී AE හමු වේ නම් AF දිග සොයන්න.

14.5 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ ප්‍රමේය මගින් අනුමේය සාධනය

මෙතෙක් උගත් ප්‍රමේයයන් අවශ්‍ය පරිදි යොදා ගනිමින් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් ඉගෙන ගනිමු. ඒ සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන් අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 1



ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාද මත D සහ E ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $DE//BC$ වන සේ ය. DE, X හි දී ද BC, Y හි දී ද කැපෙන සේ, AY ඇඳ තිබේ.

(i) $\frac{XE}{YC} = \frac{AX}{AY}$ බව

(ii) $\frac{XE}{YC} = \frac{DX}{BY}$ බව

සාධනය කරන්න.

සාධනය : (i) රූපයේ AXE හා AYC ත්‍රිකෝණ දෙකේ;

$A\hat{X}E = A\hat{Y}C$ (අනුරූප කෝණ, $XE//YC$)

$A\hat{E}X = A\hat{C}Y$ (අනුරූප කෝණ, $XE//YC$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකට ම පොදු යි.

$\therefore$ AXE හා AYC සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

එවිට; $\frac{AX}{AY} = \frac{XE}{YC}$ (ප්‍රමේයයට අනුව)

(ii) රූපයේ, ADX හා ABY ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$A\hat{D}X = A\hat{B}Y$ (අනුරූප කෝණ, $DX//BY$)

$A\hat{X}D = A\hat{Y}B$ (අනුරූප කෝණ, $DX//BY$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකටම පොදුයි.

$\therefore$ ADX හා ABY සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

$\therefore$ $\frac{AX}{AY} = \frac{DX}{BY}$

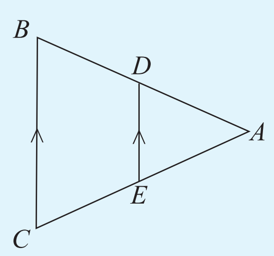
නමුත් $\frac{AX}{AY} = \frac{XE}{YC}$ (සාධිතයි)

$\therefore \quad \frac{XE}{YC} = \frac{DX}{BY}$

දැන් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

14.6 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව

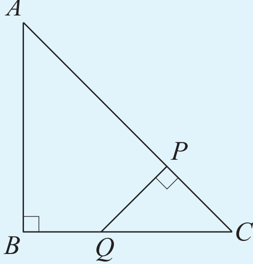


(i) ADE හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

(ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$ බව සාධනය කරන්න.

2. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව



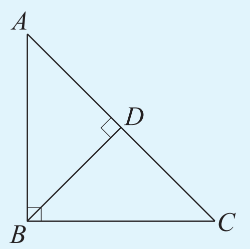
(i) ABC හා PQC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බවත්

(ii) $\frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{BC}$ බවත්

සාධනය කරන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ, $\hat{B}$ සෘජුකෝණයකි. B සිට ACට ඇඳි ලම්බය BD වේ.

(i) $AB^2 = AD. AC$ බව සාධනය කරන්න.

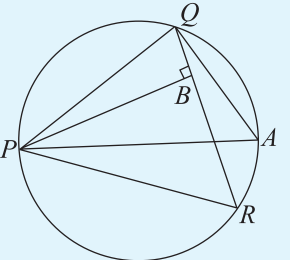


4. PA යනු දී ඇති වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. P සිට QRට ඇඳි ලම්බය PB වේ.

(i) PQA හා PBR ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව සාධනය කරන්න.

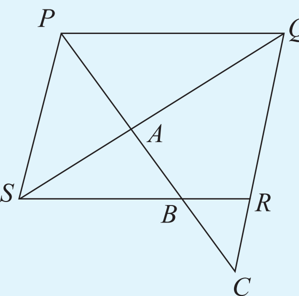
(ii) $\frac{PQ}{PB} = \frac{PA}{PR}$ බව

සාධනය කරන්න.



5. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ $Q\hat{P}S$ හි සමච්ඡේදකයට QS විකර්ණය A හි දී ද SR පාදය B හි දී ද, දික් කළ QR පාදය C හි දී ද හමු වේ.

$\dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{PC}{PB}$ බව සාධනය කරන්න.



6. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය මත P ද, AC පාදය මත Q ද පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{P}Q = A\hat{C}B$ වන සේ ය. $AP.AB = AQ.AC$ බව සාධනය කරන්න.

7. ABC ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකයෙන්, BC පාදය Q හි දී ද P හි දී වෘත්තය ද කැපේ. $AC : AP = AQ : AB$ බව සාධනය කරන්න.

8. ABC ත්‍රිකෝණයේ, $B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ. $CX = CD$ වන සේ, දික්කළ AD මත X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත.

(i) ACX හා ABD ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව

(ii) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ බව

සාධනය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයේ, DC පාදය මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{E}B = 90^\circ$ වන සේය. ADE, AEB හා EBC ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $\hat{B}$ ඍජුකෝණයකි. $AB = 5$ cm හා $BC = 2$ cm වේ. AC හි ලම්බ සමච්ඡේදකය Q හි දී AB පාදය කපයි. $AQ = 2.9$ cm බව පෙන්වන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ, AB පාදය P හි දී ද, AC පාදය Q හි දී ද හමු වන සේ, BC ට සමාන්තරව PQ ඇඳ තිබේ. CP හා BQ රේඛා S හි දී එකිනෙක කැපී යයි. BC පාදය R හි දී හමු වන සේ, AB ට සමාන්තරව SR ඇඳ තිබේ.

$\dfrac{BR}{RC} = \dfrac{AQ}{AC}$ බව සාධනය කරන්න.

15 දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක
- පන්ති සීමා සහ පන්ති මායිම් සෙවීමට
- ජාල රේඛය ඇඳීමට
- සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීමට
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම හා වක්‍රය ඇසුරෙන් අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

පන්ති ප්‍රාන්තරයක සීමා හා මායිම්

සිසුන් 30 දෙනෙකුගේ උස (ආසන්න සෙන්ටිමීටරයට) මැනීමෙන් ලබා ගන්නා ලද දත්ත සමූහයක් පහත දැක්වේ.

137, 135, 141, 147, 151, 135, 137, 143, 144, 145
140, 134, 141, 140, 153, 144, 133, 138, 155, 130
136, 137, 142, 143, 145, 143, 154, 146, 148, 158

දත්තවල වැඩි ම අගයෙන් අඩු ම අගය අඩු කළ විට ලැබෙන අගය, **පරාසය** ලෙස හැඳින්වෙන බව අපි දනිමු. එනම්,

දත්තවල පරාසය $= 158 - 130$
$= 28$

අධ්‍යයනය කිරීමේ පහසුව සඳහා දත්ත සමූහයක් බොහෝ විට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකින් දක්වනු ලැබේ. දත්තවල පරාසය වැඩි වන විට, දත්ත පන්ති ප්‍රාන්තරවලට බෙදා දක්වන බව ද අපි දනිමු. එවැනි පන්ති ප්‍රාන්තරවලට බෙදා දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති, **සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති** ලෙස හැඳින්වේ. ප්‍රාන්තර ගණන සාමාන්‍යයෙන් 5ත් 10ත් අතර ගණනක් වේ. එවැනි ව්‍යාප්තියක පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම ලෙස ගන්නේ, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ පරාසය, පන්ති ප්‍රාන්තර සංඛ්‍යාවෙන් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගයට වැඩි නිඛිලවලින් අඩු ම අගයයි.

නිදසුනක් වශයෙන් ඉහත සඳහන් දත්ත, පන්ති ප්‍රාන්තර 6ක් යටතේ ගොනු කරමු. පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම සෙවීම සඳහා මුලින් ම, පරාසය වන 28, පන්ති ප්‍රාන්තර ගණන වන 6න් බෙදමු.

එවිට, $= \dfrac{28}{6} \approx 4.66$ ලැබේ.

එමනිසා, පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම ලෙස තෝරා ගත යුත්තේ 4.66ට වැඩි නිඛිලවලින් අඩු ම නිඛිල අගය වන 5 ය.
ඉන් පසු, මුල් පන්ති ප්‍රාන්තරය තෝරා ගත යුතු ය. දත්තවල අවම අගය 130 නිසා, මුල් පන්ති ප්‍රාන්තරය 130න් ආරම්භ කළ හැකි ය.

දී ඇති දත්ත සමූහය ඇසුරෙන් සකස් කළ එකිනෙකට වෙනස් සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති දෙකක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
130 -135	3
135 - 140	7
140 - 145	10
145 - 150	5
150 - 155	3
155 - 160	2

පළමු සමූහිත ව්‍යාප්තිය

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
130 -134	3
135 - 139	7
140 - 144	10
145 - 149	5
150 - 154	3
155 - 159	2

දෙවන සමූහිත ව්‍යාප්තිය

මුලින් ම, පළමු සමූහිත ව්‍යාප්තිය සලකන්න. නිදසුනක් ලෙස එහි ඇති 130 - 135 පන්ති ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 130ට වැඩි හෝ සමාන හා 135ට අඩු උස ප්‍රමාණයන් ය. දෙවන පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 135 - 140න් දැක්වෙන්නේ 135ට වැඩි හෝ සමාන හා 140ට අඩු උස ප්‍රමාණයන් ය. මේ ආදී වශයෙන් අනෙකුත් ප්‍රාන්තර ද විස්තර කළ හැකි ය.

දැන්, දෙවන සමූහිත ව්‍යාප්තිය සලකන්න. එහි, නිදසුනක් ලෙස, 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 130ට වැඩි හෝ සමාන හා 134ට අඩු හෝ සමාන උස ප්‍රමාණයන් ය.

මෙම ව්‍යාප්ති දෙකෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර පිළිබඳ ව නිරීක්ෂණය කළ හැකි තවත් වෙනසක් දැන් සලකා බලමු. මුල් ව්‍යාප්තියෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර අතර හිඩැස් නැත. නිදසුනක් ලෙස, 130 - 135 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව වන 135න් ම ඊළඟ පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 135 - 140 ආරම්භ වේ. එනම්, මෙහි පන්ති ප්‍රාන්තරවලට පොදු සීමාවක් ඇත. එහෙත්, දෙවන ව්‍යාප්තියේ එය එසේ නො වේ. නිදසුනක් ලෙස, 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව 134 වන අතර, ඊළඟ ප්‍රාන්තරය ආරම්භ වන්නේ 135නි. එම සීමා අතර 1 ක වෙනසක් ඇත. මෙම පාඩමේ මීළඟ කොටසේ දී අප ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන ජාල රේඛය ඇඳීම සඳහා, මෙසේ හිඩදැසක් නොතිබිය යුතු ය. එමනිසා, මෙම දෙවන ව්‍යාප්තිය සුදුසු පරිදි වෙනස් කර ගත යුතු ය. මෙහි ඇති පන්ති ප්‍රාන්තරවලට පොදු මායිමක් හඳුන්වා දීමෙන් මෙම වෙනස්කම කරනු ලැබේ. එම මායිම පහසුවෙන් හඳුනා ගත හැකි ය.

නිදසුනක් ලෙස, දෙවන ව්‍යාප්තියේ 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව වන 134ත් 135 - 139 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ පහළ සීමාව වන 135ත් අතර හරි මැද පිහිටි 134.5 යන්න මායිම ලෙස ගනු ලැබේ. එසේ ගෙන සෑදූ නව ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ.

මායිම් සහිත පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

මෙහි දී, මුල් ව්‍යාප්තියේ සෑම පන්ති ප්‍රාන්තරයකම පහළ සීමාවෙන් 0.5ක් අඩු වී ඇති බවත්, ඉහළ සීමාවට 0.5ක එකතු වී ඇති බවත් නිරීක්ෂණය කරන්න. මෙම නීතිය මුල් හා අවසාන පන්ති ප්‍රාන්තරවලට ද වලංගු වේ. ඒ අනුව 129.5 හා 159.5 ලැබී ඇති බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න. එසේ ම, මෙම නව ව්‍යාප්තියේ පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම අප බලාපොරොත්තු වූ පරිදි 5 වන බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න.

ඉහත පළමු ආකාරයේ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති සරල ය. එහෙත්, ප්‍රායෝගික ව, දෙවන ආකාරයේ ව්‍යාප්ති තැනීම පහසු ය. මෙම ආකාර දෙකේ ම ව්‍යාප්ති සංඛ්‍යානයේ දී බොහෝ විට හමු වේ.

15.1 සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය

දැන්, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් දී ඇති විට ජාල රේඛය අඳින අයුරු විමසා බලමු.

ජාල රේඛය යනු සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ඇති දත්ත ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරන ක්‍රමයකි. එහි දී පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාත, එකිනෙකට ස්පර්ශ ව පවතින සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තීරුවල උසින් දක්වනු ලැබේ. පන්ති ප්‍රාන්තර සියල්ලට ම එක ම තරම ඇති අවස්ථාවේ දී (ඉහත කොටසේ නිදසුනේ ඇති පරිදි) ජාල රේඛය අඳින අයුරු මුලින් ම සලකා බලමු.

ජාල රේඛයක් ඇඳීමේ දී පහත දැක්වෙන පියවර අනුගමනය කරන්න.

- සුදුසු පරිමාණයකට තිරස් අක්ෂය මත පන්ති මායිම් ලකුණු කරන්න.
- සුදුසු පරිමාණයකට සිරස් අක්ෂය මත එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතයේ උස දැක්වෙන තීරු අඳින්න.

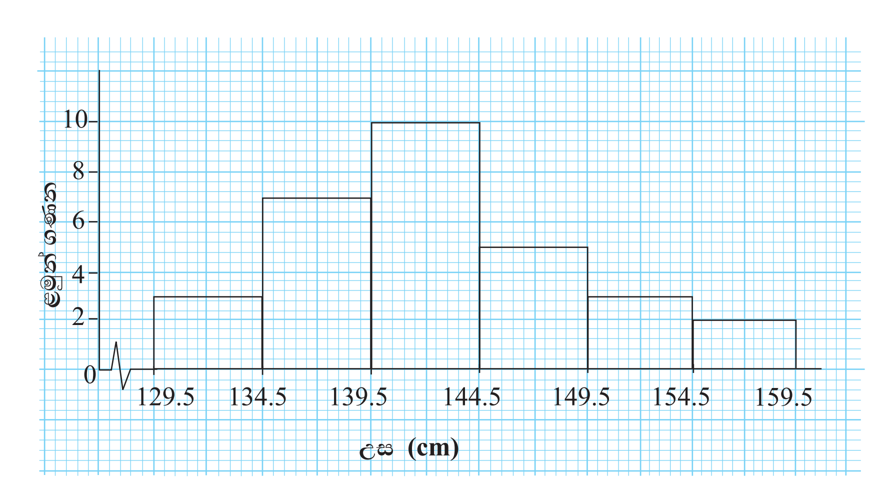
දැන් පහත දැක්වෙන නිදසුන් මගින් ජාල රේඛය අඳින අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ඉහත කොටසේ නිදසුනෙහි පිළියෙල කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙහි ජාල රේඛය අඳින්න.
මේ සඳහා දෙවන ආකාරයේ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සලකමු.

මායිම් සහිත පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

අදාළ ජාල රේඛය පහත දැක්වේ.
තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා කොටු දෙකකින් සෙන්ටිමීටර 1ක් ද සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 5කින් ළමයි දෙදෙනකු ද නිරූපණය කොට ඇත.



මෙහි දී තීරු එකිනෙක ස්පර්ශ ව පවතින බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

සටහන: මෙහි දත්ත 129.5න් පටන් ගන්නා බැවින් 0 සිට 129.5 දක්වා පන්ති ප්‍රාන්තර ජාල රේඛයේ පෙන්වීම අනවශ්‍ය වේ. x අක්ෂයෙහි මුලින් ⌇ ලකුණ යොදා ඇත්තේ එම කොටස ඇඳීමේදී නොසලකා ඇති බව දැක්වීමට ය.

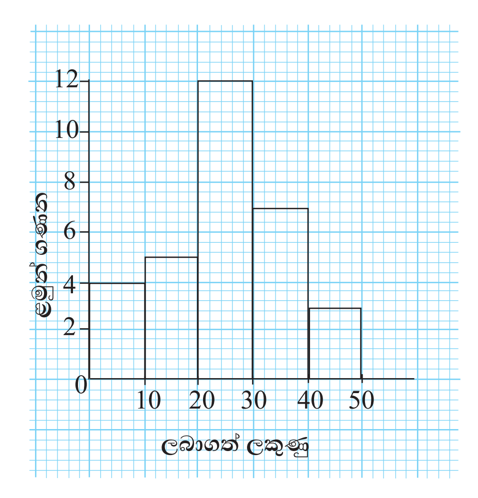
නිදසුන 2

පාසල් පාදක ඇගයීමක දී ළමයි ගණිත විෂයය සඳහා ලබාගත් ලකුණු දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	4	5	12	7	3

මෙහි, නිදසුනක් ලෙස, 0 - 10 ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 0ට වැඩි හෝ සමාන හා 10ට අඩු ලකුණු යි. මේ ආදි ලෙස අනෙක් පන්ති ප්‍රාන්තර ද අර්ථ දැක්වේ. සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියට අදාළ ජාල රේඛය අඳින්න.

මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ පළමු පන්ති ප්‍රාන්තරය 10න් අවසන් වන අතර, ඊළඟ පන්ති ප්‍රාන්තරය 10න් ඇරඹේ. මෙහි ජාල රේඛය ඉතා පහසුවෙන් ඇඳිය හැකි ය.



පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම අසමාන වන පරිදි වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය ඇඳීම පිළිබඳ ව දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිත විෂය සඳහා ළමයි 40 දෙනකු ලබාගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	2	4	6	9	5	8	6

මෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර පරීක්ෂා කිරීමේ දී සියලු පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන නොවන බව ඔබට දැකිය හැකි ය. මුල් ප්‍රාන්තර 5හි තරම 10 බැගින් වන අතර, ඊළඟ ප්‍රාන්තර දෙකෙහි තරම පිළිවෙළින් 20 හා 30 වේ. ජාල රේඛයක තිබිය යුතු වැදගත් ලක්ෂණයක් වන්නේ තීරුවල වර්ගඵල අදාළ සංඛ්‍යාතයන්ට සමානුපාතික වීම යි. ඒ අනුව පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන වන විට, සංඛ්‍යාතය, තීරුවේ උසට සමානුපාතික වේ. එබැවින් ඉහත 1 හා 2 නිදසුන්වල දී සංඛ්‍යාත, තීරුවේ උස මගින් එක්වර ම දැක්විය හැකි විය. එහෙත් මෙහි දී පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන නොවන නිසා සංඛ්‍යාතය උස මගින් එක්වර දැක්විය නො හැකි ය. තීරුවල උස සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික වන ලෙස සකස් කරගත යුතු ය. එය කරනු ලබන්නේ පහත දැක්වෙන පරිදි ය.

සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ 50 - 70 සහ 70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තර හැර අනෙක් පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම 10 වේ. 50 - 70 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 20 ද 70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 30ක් ද වේ.

ඒ අනුව, කුඩා ම පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 10 වේ. 50 - 70 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම එමෙන් දෙගුණයකි. පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය නිරූපණය කරන තීරුවේ වර්ගඵලය සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික විය යුතු බැවින්,

$$\text{තීරුවේ උස} = \frac{\text{සංඛ්‍යාතය}}{2}$$

ලෙස ගණනය කරනු ලැබේ.

$\therefore$ 50 - 70 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තීරුවේ උස $= \frac{8}{2}$

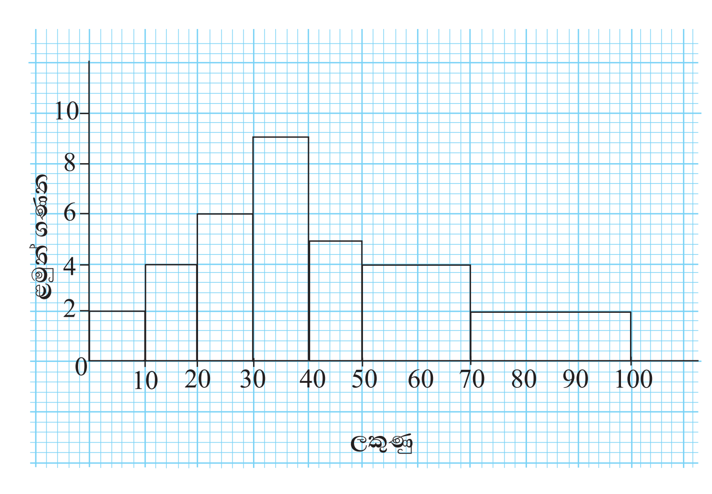
$= 4$

70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම කුඩා ම තරම සහිත පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම මෙන් තුන් ගුණයක් වේ.

$\therefore$ 70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තීරුවේ උස $= \frac{6}{3}$

$= 2$ ලෙස ගණනය කරනු ලැබේ.

මෙසේ ගණනය කිරීමෙන් පසු ඇඳි ජාල රේඛය පහත දැක්වේ.



15.1 අභ්‍යාසය

1. එක්තරා ප්‍රදේශයක කාලගුණ මධ්‍යස්ථානයකින් රැස් කළ තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

සතියක් තුළ වර්ෂාපතනය mm වලින්	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
සති ගණන	5	6	15	10	7	5	4

2. පාසල් පුස්තකාලයකින් 2015 වර්ෂය තුළ දිනපතා බැහැර ගෙන යෑමට නිකුත් කරන ලද පොත් සංඛ්‍යා දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර (නිකුත් කරන ලද පොත් සංඛ්‍යාව)	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
(සංඛ්‍යාතය) දින ගණන	5	10	20	15	10	7

3. වන වගාවක හෙක්ටාර 10ක තිබූ තේක්ක ගස්වල වට ප්‍රමාණ මැන රැස් කළ දත්ත ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. එම දත්ත ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

ගසක වට ප්‍රමාණය (cm)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
ගස් සංඛ්‍යාව	6	8	9	15	24	21

4. ග්‍රාමීය ජල ව්‍යාපෘතියකින් එක් දිනක් තුළ නිවෙස් 60ක් ලබා ගත් ජල ප්‍රමාණ පිළිබඳ ව රැස් කළ තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

නිවසක් භාවිත කළ ජල ප්‍රමාණ (ආසන්න ලීටරයට)	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42
නිවෙස් සංඛ්‍යාව	4	6	15	15	10	7	3

5. එක්තරා ගමක නිවාස 75ක්, 2015 ජනවාරි මාසය තුළ භාවිත කළ විදුලි ඒකක ගණන පිළිබඳ රැස් කර ගත් තොරතුරු පහත වගුවෙන් දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (විදුලි ඒකක ගණන)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
සංඛ්‍යාතය (නිවෙස් සංඛ්‍යාව)	10	11	14	16	12	12

6. දුරකථන පහසුකම් සපයන ස්ථානයකින් එක් දිනයක දී ලබා ගන්නා ලද ඇමතුම් සංඛ්‍යාව සහ එක් එක් ඇමතුමකට ගත වූ කාලය පිළිබඳ තොරතුරු පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙන් දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

ඇමතුමක් සඳහා ගත කළ කාලය (තත්පර)	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90	90 - 120
ඇමතුම් සංඛ්‍යාව	8	9	12	16	8

15.2 සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය

සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය යනු ජාල රේඛය මෙන් ම සමූහිත දත්ත, ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරන ක්‍රමයකි.

සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ක්‍රම දෙකකට නිර්මාණය කළ හැකි ය.

- සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය ඇසුරෙන්
- පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහ සංඛ්‍යාතය ඇසුරෙන්

මුලින් ම, ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය නිර්මාණය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ඉහත නිදසුනක දී භාවිත කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් මේ සඳහා යොදා ගනිමු.

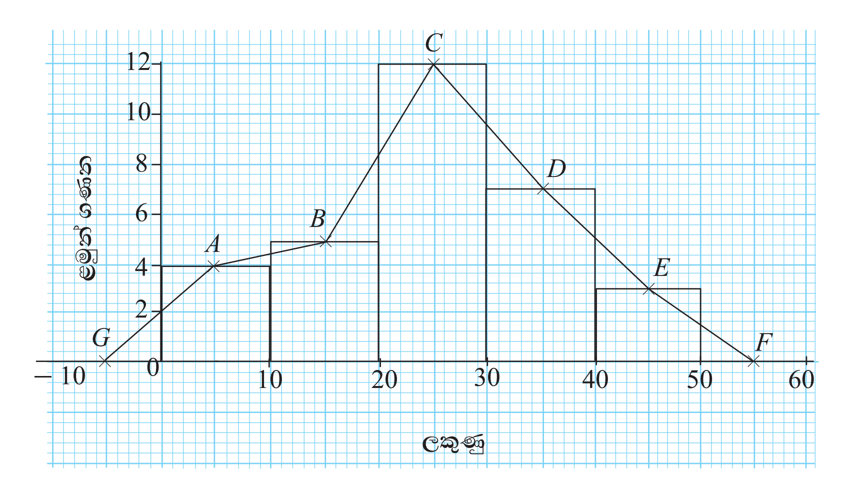
ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	5	12	7	3

(i) මුලින් ම, දී ඇති තොරතුරුවලට අනුරූප ජාල රේඛය අඳින්න.

(ii) ජාල රේඛයේ එක් එක් තීරුවේ ඉහළ ම පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි, "×" ලකුණු යොදන්න. (පහත රූපය බලන්න එම "×" ලකුණු A, B, C, D, E ලෙස දක්වා ඇත.)

(iii) මෙම "×" ලකුණු, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි පිළිවෙළින්, සරල රේඛා ඛණ්ඩ මගින් යා කරන්න.

(iv) පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරමින් අඩක දුරක් (එනම්, මෙහි දී ඒකක 5ක දුරක්) අවසාන තීරුවට දකුණු පසිනුත්, පළමු තීරුවට වම් පසිනුත් තිරස් අක්ෂය මත ලකුණු කරන්න. E හා F ද A හා G ද යා කරන්න.



දැන්, $ABCDEFG$ බහු-අස්‍රයක් ලැබී ඇත. එම බහු-අස්‍රයට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ **සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය** යැයි කියනු ලැබේ. සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රයේ වර්ගඵලය ජාල රේඛයේ තීරවල වර්ගඵලයට සමාන බව ඔබට හොඳින් නිරීක්ෂණය කළ හොත්, දැක ගත හැකි ය.

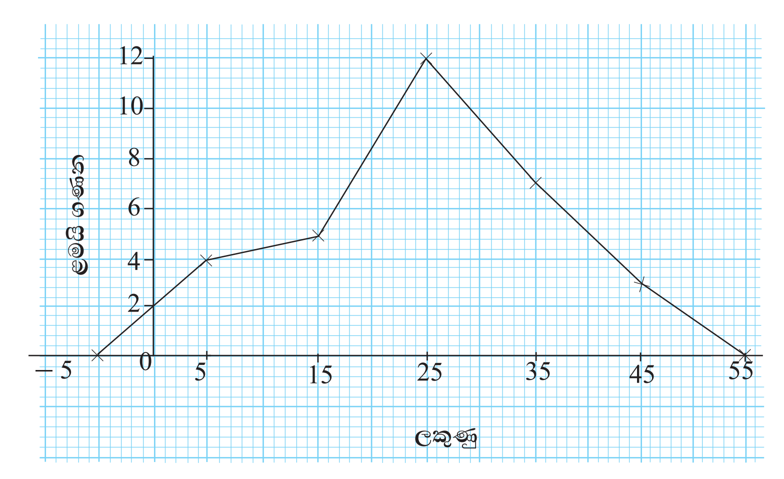
සෑම විට ම ජාල රේඛය ඇඳීමෙන් පසු සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම අවශ්‍ය නො වේ. පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහ සංඛ්‍යාතය ඇසුරෙන් ද සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳිය හැකි ය. එසේ අඳින අයුරු පහත නිදසුන ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම සඳහා පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය ඇතුළත් වගුවක් සකස් කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය	සංඛ්‍යාතය
0 - 10	5	4
10 - 20	15	5
20 - 30	25	12
30 - 40	35	7
40 - 50	45	3

පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද සංඛ්‍යාතය සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද ලකුණු කොට, අනුරූප ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍ය අනුපිළිවෙළින් සරල රේඛා ඛණ්ඩ මගින් යා කිරීමෙන් ඉහත පරිදි ම සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ලබා ගත හැකි ය. අන්ත ලක්ෂ්‍ය ද යා කිරීමෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ලබා ගන්න.



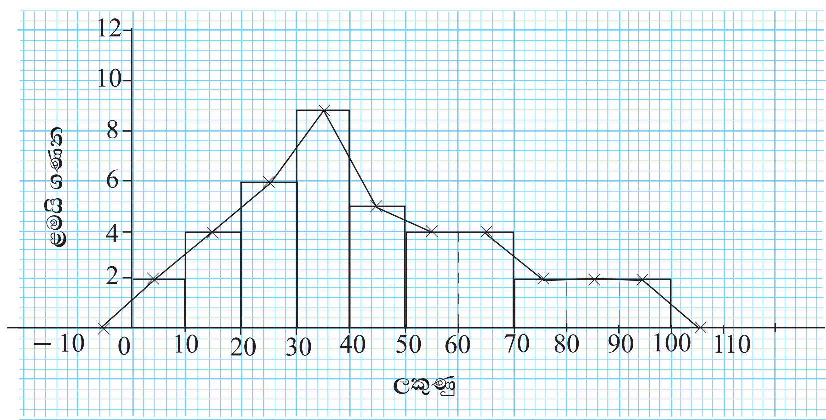
තරම අසමාන පන්ති ප්‍රාන්තර සහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම පිළිබඳ ව මීළඟට විමසා බලමු.

නිදසුන 3

ඉහත දී යොදා ගත් තරම අසමාන පන්ති ප්‍රාන්තර සහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳිමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	2	4	6	9	5	8	6

අදාළ සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය පහත දැක්වේ.



මෙහි දී, තරම 20 වූ පන්ති ප්‍රාන්තරය, තරම 10 වන පන්ති ප්‍රාන්ත දෙකකට බෙදා, ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූප සංඛ්‍යාත සලකා ඇත. එසේ ම, තරම 30 වූ පන්ති ප්‍රාන්තරය, තරම 10 වන පන්ති ප්‍රාන්තර 3කට බෙදා, ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූප සංඛ්‍යාත ද සලකා ඇත. මෙවිට ද ජාල රේඛයේ වර්ගඵලය, තීරවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

15.2 අභ්‍යාසය

1. පාසලක පවත්වන ලද වෛද්‍ය සායනයක දී ඊට සහභාගී වූ ළමයින්ගේ බර මැනීමෙන් ලබාගත් තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

ළමයකුගේ ස්කන්ධය (kg)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
ළමයි සංඛ්‍යාව	8	10	15	7	15

(i) මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.
(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

2. සමාගමක් විසින් නිපදවන ලද විදුලි බුබුළුවල ආයු කාලය පරීක්ෂා කිරීම සඳහා කරන ලද පරීක්ෂණයක දී ලබා ගත් දත්ත අනුව සකස් කරන ලද සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (බල්බයක් දැල්වුණු පැය ගණන)	100 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
සංඛ්‍යාතය (බල්බ සංඛ්‍යාව)	12	10	20	25	15	12

(i) සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය අඳින්න.
(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

3. ක්‍රීඩා සමාජයක සාමාජිකයන්ගේ ශරීර ස්කන්ධය පිළිබඳ රැස් කළ තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වා ඇත.

ශරීර ස්කන්ධය (kg)	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85
සාමාජිකයන් සංඛ්‍යාව	10	15	6	4	2

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහිත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය යොදා ගනිමින් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

4. පාසලක 11 ශ්‍රේණියේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යාවන් පිරිසක් ගණිතය විෂයය සඳහා ලබා ගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පහත දැක්වේ.

ලකුණු පන්ති ප්‍රාන්තර	0 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
ළමයි ගණන සංඛ්‍යාතය	6	5	10	7	12

(i) මෙම තොරතුරුවල ජාල රේඛය ඇඳ එමගින් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

5. එක්තරා දිනයක දී දුරකථන පහසුකම් සපයන මධ්‍යස්ථානයකින් ලබාගත් දුරකථන ඇමතුම් සංඛ්‍යාව සහ ඇමතුම් සඳහා ගත වූ කාලය පිළිබඳ රැස් කළ තොරතුරු අනුව පහත දැක්වෙන වගුව සකස් කර ඇත.

දුරකථන ඇමතුමක් සඳහා ගත වූ කාලය (තත්පර)	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16
ඇමතුම් ගණන	3	9	20	12	6

(i) මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය අඳින්න.
(ii) එම ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

15.3 සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය

මෙය, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක දත්ත ප්‍රස්තාරිකව නිරූපණය කරන තවත් ක්‍රමයකි. සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින අයුරු පහත නිදසුන ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

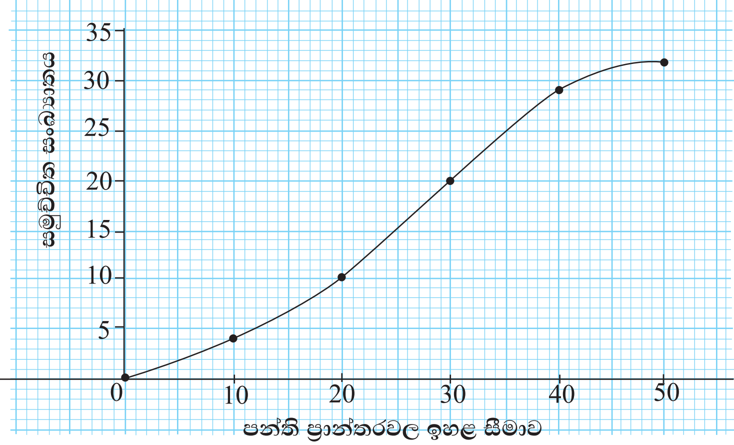
පන්තියක ළමයි 32ක් ගණිත පරීක්ෂණයක දී ලබා ගත් ලකුණු පහත ආකාරයට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකින් දක්වා ඇත. එහි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.

ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	6	10	9	3

මුලින් ම, ඉහත වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය	සමුච්චිත සංඛ්‍යාත
0 - 10	4	4
10 - 20	6	10
20 - 30	10	20
30 - 40	9	29
40 - 50	3	32

සමුච්චිත යන්නෙහි තේරුම "එකතු වූ" යන්න යි. ඉහත වගුවේ, නිදසුනක් ලෙස, 20 - 30 පන්ති ප්‍රාන්තරයට අදාළ සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වන්නේ 30ට වඩා අඩු සියලු සංඛ්‍යාතවල එකතුව යි. (වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, 30ට වඩා අඩුවෙන් ලකුණු ලබා ගත් ළමයි ගණන යි). එය 20 කි. 40 - 50 ප්‍රාන්තරයට අදාළ සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වන්නේ 50ට අඩුවෙන් ලකුණු ලබා ගත් ළමයි ගණන යි. එනම්, සියලු ළමයි ගණන වන 32 යි. මෙසේ වගුව සකස් කළ පසු සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා, එක් එක් ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාවට එදිරි ව සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන ලක්ෂ්‍ය සියල්ල ලකුණු කර, ඉන් පසු, පහත රූපයේ දැක්වෙන අයුරින්, එම ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් සුමට ව යා කළ යුතු ය.



සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය

ඉහත කොටස්වල දී විමසා බැලුවේ දත්ත සමූහයක ජාල රේඛය, සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය හා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ලබා ගන්නා ආකාරය යි. එමගින්, දත්ත විසිරී කේන්ද්‍රගත වී ඇති ආකාරය පිළිබඳ අදහසක් ලබා ගැනීම පහසු ය. නිදසුනක් ලෙස, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මාත පන්තිය කුමක් ද යන්න ජාල රේඛය දෙස බැලූ සැණින් නිගමනය කළ හැකි ය. එසේ ම, දත්ත සමමිතික ව විසිරී ඇත් ද යන්න පිළිබඳ ව ද අදහසක් ගත හැකි ය. මෙම කොටසේ දී අප ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ දත්ත සමූහයක චතුර්ථක හා අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය පිළිබඳ ව යි. එමගින්, දත්ත විසිරී ඇති ආකාරය පිළිබඳ යම් අදහසක් ලබා ගත හැකි ය.

දත්ත සමූහයක චතුර්ථක හා අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීම සඳහා, මුලින් ම කළ යුත්තේ එම දත්ත ආරෝහණ පිළිවෙලට ලියා ගැනීමයි. ඉන්පසු පහත දැක්වෙන පරිදි පළමු චතුර්ථකය (Q_1), දෙවන චතුර්ථකය (Q_2) හා තුන්වන චතුර්ථකය (Q_3) සොයනු ලැබේ.

පියවර 1: මුලින්ම, දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය දෙවන චතුර්ථකයයි.

පියවර 2: මධ්‍යස්ථයෙන් වම්පස පිහිටි දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය පළමු චතුර්ථකයයි.

පියවර 3: මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණු පස පිහිටි දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය තුන්වන චතුර්ථකයයි.

නිදසුනක් ලෙස, ආරෝහණ පිළිවෙලට, දත්ත වැලක් (ආවලියක්) ආකාරයෙන් ලියා ඇති පහත දැක්වෙන දත්ත සමූහය සලකන්න.

නිදසුන 1

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

මෙහි ඇති දත්ත ගණන 19 කි. එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 14 ය (එය කොටුකර දක්වා ඇත)

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, [14,] 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

දැන් මධ්‍යස්ථයේ වම්පස පිහිටි කොටස සලකන්න.

5, 6, 6, 8, [11,] 12, 12, 12, 13

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 11 යි. එය ද කොටුකර දක්වා ඇත.
අවසාන වශයෙන්, මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණුපස පිහිටි දත්ත කොටස සලකන්න.

14, 14, 17, 18, [20,] 24, 25, 26, 30

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 20යි. එය ද කොටුකර දක්වා ඇත.
මේ අනුව,

පළමු චතුර්ථකය $= Q_1 = 11$

දෙවන චතුර්ථකය $= Q_2 = 14$

තුන්වන චතුර්ථකය $= Q_3 = 20.$

නිදසුන 2

ආරෝහණ පිළිවෙලට ලියා ඇති 2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 11, 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20 යන දත්ත 18හි චතුර්ථක සොයමු.

2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, [8, 11,] 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ කොටුකර දක්වා ඇති 8 හා 11 යන දත්ත දෙකෙහි මධ්‍යන්‍යයයි.

එනම්,

$$Q_2 = \frac{8 + 11}{2} = 9.5$$

මධ්‍යස්ථයෙන් වම්පස පිහිටි දත්ත කොටස මෙසේ ය:

$$2, 2, 3, 6, \boxed{6,} 6, 7, 8, 8$$

එහි මධ්‍යස්ථ වන 6 කොටු කර දක්වා ඇත.
එමනිසා, $Q_1 = 6$.

අවසාන වශයෙන්, මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණු පස පිහිටි දත්ත කොටස මෙසේ ය:

$$11, 11, 12, 12, \boxed{15,} 15, 16, 17, 20$$

එහි මධ්‍යස්ථය වන 15 කොටුකර දක්වා ඇත.
එමනිසා, $Q_3 = 15$.

නිදසුන 3

පහත දැක්වෙන දත්ත වැලෙහි දත්ත 17 ක් ඇත. එහි චතුර්ථක සොයන්න.

102, 104, 104, 105, 107, 107, 107, 108, 112, 112, 113, 115, 115, 119, 120, 125, 126

ඉහත දී ඇති පියවර අනුගමනය කළ විට ලැබෙන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන ඊ හිස්වලින් දක්වා චතුර්ථක ගණනය කර ඇති අයුරු වටහා ගන්න.

$$102, 104, 104, \boxed{105, 107,} 107, 107, 108, \boxed{112,} 112, 113, 115, \boxed{115, 119,} 120, 125, 126$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$Q_1 = \frac{105 + 107}{2} = 106$$

$$Q_2 = 112$$

$$Q_3 = \frac{115 + 119}{2} = 117$$

නිදසුන 4

පහත දැක්වෙන දත්ත වැලෙහි දත්ත 16ක් ඇත. එහි චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන ඊ හිස් මගින් දක්වා චතුර්ථක ගණනය කර ඇති ආකාරය නිරීක්ෂණය කරන්න.

21, 23, 25, [25, 26,] 28, 28, [30, 30,] 34, 34, [35, 37,] 37, 40, 42

ඒ අනුව, $Q_1 = \dfrac{25+26}{2} = 25.5$, $Q_2 = \dfrac{30+30}{2} = 30$, $Q_3 = \dfrac{35+37}{2} = 36$.

දත්ත වැලක චතුර්ථක සොයනා ආකාර කිහිපයක්ම සංඛ්‍යානයේ දී භාවිත වේ. මෙහි විස්තර කර ඇති ආකාරය, වඩාත් පහසු මෙන්ම ප්‍රායෝගිකව බොහෝ විට යොදාගන්නා ක්‍රමයකි.

චතුර්ථක සෙවීමේ තවත් ක්‍රමයක් වන්නේ පළමු, දෙවන හා තෙවන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන

$\frac{1}{4}(n+1)$, $\frac{1}{2}(n+1)$ හා $\frac{3}{4}(n+1)$ යන සූත්‍ර භාවිතයෙන් සොයා ගැනීමයි.

උදාහරණයක් ලෙස, 4 6 7 8 15 18 20 දත්ත වැල සලකන්න.

මෙම සූත්‍රවලට අනුව දී ඇති දත්ත වැලෙහි,

Q_1 පිහිටන්නේ $\frac{1}{4}(7+1) = 2$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_1 = 6$.

Q_2 පිහිටන්නේ $\frac{1}{2}(7+1) = 4$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_2 = 8$.

Q_3 පිහිටන්නේ $\frac{3}{4}(7+1) = 6$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_3 = 18$.

තවත් උදාහරණයක් ලෙස, 9 12 18 20 21 23 24 26 දත්ත වැල ද සලකන්න.

සූත්‍රවලට අනුව දී ඇති දත්ත වැලෙහි,

Q_1 පිහිටන්නේ $\frac{1}{4}(8+1) = 2.25$ හි ද ඒ අනුව, $Q_1 = 12 + \frac{1}{4}(18-12) = 13.5$

Q_2 පිහිටන්නේ $\frac{1}{2}(8+1) = 4.5$ හි ද ඒ අනුව, $Q_2 = \dfrac{20+21}{2} = 20.5$

Q_3 පිහිටන්නේ $\frac{3}{4}(8+1) = 6.75$ හි ද ඒ අනුව, $Q_3 = 23 + \frac{3}{4}(24-23) = 23.75$

මෙහි දී එකිනෙකට වෙනස් ක්‍රම භාවිතයේ දී පිළිතුරු සඳහා සුළු වෙනස්කම් සහිත පිළිතුරු ලැබිය හැකි ය. සංඛ්‍යානයේ දී පිළිතුරු සඳහා දළ අගයන් (ආසන්න අගයන්) ලබාගන්නා බැවින් එසේ සුළු වෙනස්කම් තිබීම ගැටලු සහගත නොවේ.

දත්ත සමූහයක අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ තුන්වන චතුර්ථකයෙන් පළමු චතුර්ථකය අඩු කළ විට ලැබෙන අගය යි. එනම්,

එනම්, **අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය** $= Q_3 - Q_1$

15.3 අභ්‍යාසය

1. වැඩපළක සේවය කරන සේවකයන් 17 දෙනකුගේ වයස් (අවුරුදු) පිළිවෙළට පහත දැක්වේ.

21, 22, 23, 24, 25, 27, 27, 30, 34, 35, 40, 41, 42, 44, 46, 47, 50

මෙම දත්ත සමූහයේ
(i) මධ්‍යස්ථය
(ii) පළමුවැනි චතුර්ථකය
(iii) තුන්වන චතුර්ථකය
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය
සොයන්න.

2. පන්තියක සිටින ළමයි සමූහයකගේ නිවෙස්වල සිටින සාමාජික සංඛ්‍යාව පිළිබඳ රැස් කර ගත් තොරතුරු පහත දැක්වේ.

7, 6, 4, 3, 8, 5, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 7, 10, 5

මෙම දත්ත සමූහය ආරෝහණ පිළිවෙළට සකසා එහි
(i) මධ්‍යස්ථය
(ii) පළමුවන චතුර්ථකය
(iii) තුන්වන චතුර්ථකය
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය
සොයන්න.

3. 2015 වර්ෂයේ දිනක් තුළ දී නගරයක වෙළෙඳසල් 32ක් විසින් භාවිත කෙරුණු විදුලි ඒකක ගණන පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ.

විදුලි ඒකක ගණන	2	3	4	5	6	7	8	10
වෙළෙඳසල් සංඛ්‍යාව	5	2	6	6	7	2	3	1

මෙම දත්ත සමූහයේ
(i) මධ්‍යස්ථය

(ii) පළමුවන චතුර්ථකය

(iii) තුන්වන චතුර්ථකය

(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය

සොයන්න. (ඉඟිය : දත්ත ආවලියක් ලෙස සකස් කර ගන්න.)

15.4 අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය තවදුරටත්

අපි මෙම කොටසේ දී ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ සමූහිත දත්තවල චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන ආකාරය පිළිබඳවය. සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය යොදා ගනිමින් ඒවා සොයන ආකාරය පිළිබඳ පමණක් මෙහි විස්තර කෙරේ.
පහත දැක්වෙන නිදසුන ඇසුරෙන් සමූහිත දත්තවල චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

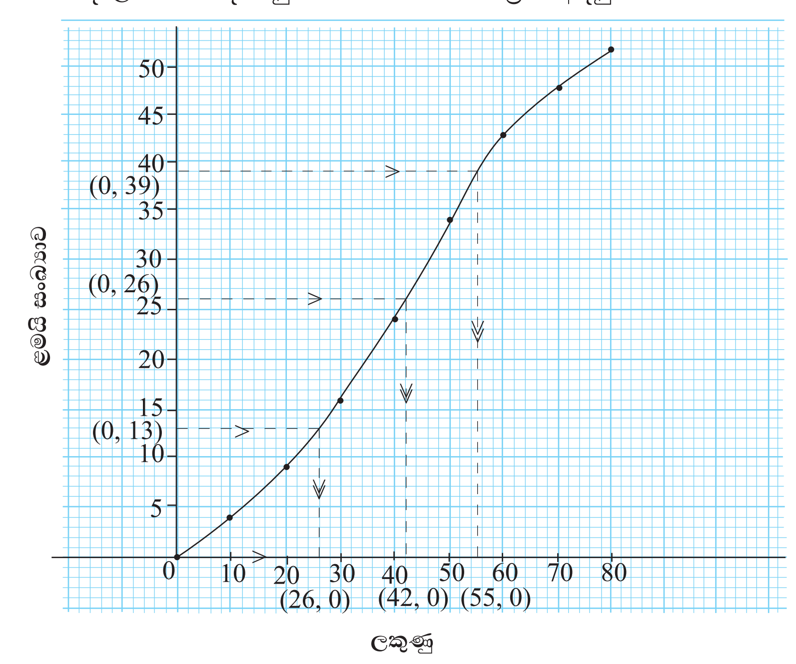
වාර පරීක්ෂණයක දී 11 වන ශ්‍රේණියේ ළමයි සමූහයක් ගණිතය විෂය ට ලබා ගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. එම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.

ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	5	7	8	10	9	5	4

මෙම වගුවේ දත්ත ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා අගය වගුවක් ගොඩ නගමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 - 10	4	4
10 - 20	5	9
20 - 30	7	16
30 - 40	8	24
40 - 50	10	34
50 - 60	9	43
60 - 70	5	48
70 - 80	4	52

15.3 කොටසේ දී උගත් පරිදි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.



ඉහත සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය සහිත රූපයේ ඇති තිරස් හා සිරස් රේඛා පිළිබඳ ව දැන් අවධානය යොමු කරමු.

මෙහි මුළු දත්ත ගණන 52කි. එනම්, සංඛ්‍යාතවල එකතුව 52කි. මුලින් ම, එම දත්ත 52හි පළමු, දෙවන හා තුන්වන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන සොයා ගත යුතු ය.

සටහන: සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් චතුර්ථක සෙවීමේ දී ඉහත 15.3 කොටසේ දී මෙන් චතුර්ථක සෙවීම අනවශ්‍ය ය. සමූහිත දත්ත විශාල ගණනක් ඇති නිසා (30කට වැඩි ගණනක් විශාල ගණනක් ලෙස මෙහි දී සලකනු ලැබේ), මෙහි දී සංඛ්‍යාතවලින් $\frac{1}{4}$ ක් $\frac{1}{2}$ ක් හා $\frac{3}{4}$ ක් පිහිටන ස්ථාන සොයා ගැනීම ප්‍රමාණවත් ය.

පළමු චතුර්ථකය පිහිටන්නේ සංඛ්‍යාත ආරෝහණ පිළිවෙළට සැකසූ විට, මුළු සංඛ්‍යාත ගණනින් $\frac{1}{4}$ක් වන සංඛ්‍යාතය පිහිටි ස්ථානයේ ය. ඒ අනුව,

Q_1 පිහිටි ස්ථානය = $\frac{1}{4} \times 52$ වන ස්ථානය $= 13$ වන ස්ථානය

Q_2 පිහිටි ස්ථානය = $\frac{1}{2} \times 52$ වන ස්ථානය $= 26$ වන ස්ථානය

Q_3 පිහිටි ස්ථානය = $\frac{3}{4} \times 52$ වන ස්ථානය $= 39$ වන ස්ථානය

දැන්, සංඛ්‍යාත දක්වන සිරස් අක්ෂය මත, 13, 26 හා 39 ලක්ෂ්‍යවලට (සංඛ්‍යාතවලට) අනුරූප දත්ත සෙවිය යුතු ය. ඒ සඳහා අවශ්‍ය රේඛා ඉහත රූප සටහනේ දැක්වේ. නිදසුනක් ලෙස, පළමු චතුර්ථකය සොයන්නේ මෙසේ ය:

පළමු චතුර්ථකය පිහිටි ස්ථානය 13 නිසා, සිරස් අක්ෂය මත 13 හි සිට තිරස් රේඛාවක් ඇඳ, එය වක්‍රය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට සිරස් රේඛාවක්, තිරස් අක්ෂය කැපෙන තෙක් ඇඳිනු ලැබේ. එම කැපෙන ලක්ෂ්‍යයට අදාළ අගය වන්නේ පළමු චතුර්ථකය යි.

දී ඇති නිදසුන සඳහා මෙසේ චතුර්ථක සෙවූ විට $Q_1 = 26$, $Q_2 = 42$ හා $Q_3 = 55$ ලැබේ.

එමනිසා, අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය $= Q_3 - Q_1 = 55 - 26 = 29$

නිදසුනක් ලෙස, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මුළු සංඛ්‍යාතය 51ක් නම්, එවිට පළමු, දෙවන හා තුන්වන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන පිළිවෙළින්,

$\frac{1}{4} \times 51 = 12.75$ වන ස්ථානය

$\frac{1}{2} \times 51 = 25.5$ වන ස්ථානය

$\frac{3}{4} \times 51 = 38.25$ වන ස්ථානය ලෙස ගත හැකි ය.

ඉන් පසු, සිරස් අක්ෂය මත 12.75, 25.5 හා 38.25 යන අගයන්වලට (හෝ, ඔබගේ ප්‍රස්තාරයේ යොදා ගන්නා පරිමාණය අනුව සුදුසු ලෙස වටයා ලැබෙන අගයන්වලට) අදාළ ව චතුර්ථක සෙවිය හැකි ය.

15.4 අභ්‍යාසය

1. කාර්යාලයක සේවකයන් 2015 වර්ෂයේ දී ලබා ගත් නිවාඩු පිළිබඳ තොරතුරු පහත දැක්වේ.

දින ගණන	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
සේවකයන් ගණන	10	18	11	8	5	4

(i) ඉහත තොරතුරුවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුව ගොඩ නගන්න.
(ii) වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන්
  (*a*) සේවකයන්ගේ නිවාඩුවල මධ්‍යස්ථ අගය
  (*b*) දත්තවල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

2. මාසික පරීක්ෂණයක දී 11 ශ්‍රේණියේ ළමුන් විද්‍යාව විෂයය ට ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දැක්වේ.

ලකුණු පන්ති ප්‍රාන්තරය	0 - 15	15 - 30	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90
ළමයි සංඛ්‍යාව	6	8	12	20	10	4

(i) වගුවේ දත්ත ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන්
  (a) පළමුවන චතුර්ථකය
  (b) දෙවන චතුර්ථකය
  (c) තුන්වන චතුර්ථකය
සොයන්න.
(iv) ලබා ගත් ලකුණුවල අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

3. 2015 ජනවාරි මාසයේ ඇඟලුම් කම්හලක සේවකයන්ගේ වැටුප් පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවෙන් දැක්වේ. එම තොරතුරු ඇසුරෙන් දත්තවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න. වක්‍රය ඇසුරෙන් සේවකයකුගේ මධ්‍යස්ථ වැටුප හා වැටුප්වල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

සේවකයකුගේ මාසික වැටුප රුපියල් පන්ති ප්‍රාන්තරය	20000 - 20500	20500 - 21000	21000 - 21500	21500 - 22000	22000 - 22500	22500 - 23000	23000 - 23500	23500 - 24000
සේවකයන් ගණන	8	10	15	18	25	12	9	7

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක ඇති නිවෙස් මගින් විදුලිය භාවිතා කිරීම වෙනුවෙන් ගෙවන මාසික ගාස්තු ඇසුරෙන් සකස් කළ වගුවක් පහත දැක්වේ.

මාසික ගාස්තුව (රුපියල්)	0 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000
නිවෙස් සංඛ්‍යාව	8	14	24	12	6

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

(iii) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

2. කාර්යාලයක සේවකයන්ගේ වයස් පිළිබඳ ව රැස් කරන ලද තොරතුරු ඇසුරෙන් පිළියෙල කරන ලද සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

වයස (අවුරුදු)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
සේවකයන් ගණන	8	12	14	18	16	6	2	2

දී ඇති සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ
(i) ජාල රේඛය අඳින්න.
(ii) සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iv) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

3. නිවාස 100කින් යුත් නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක එක් එක් නිවාසයක් විසින් එක්තරා මාසයක දී පරිභරණය කළ ජල ඒකක ගණන ඇසුරෙන් පහත වගුව පිළියෙල කර ඇත.

ජල ඒකක ගණන	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
නිවෙස් ගණන	2	8	35	40	10	5

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන්, ජාල රේඛය හා සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(iii) එම වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iv) මෙම දත්තවල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

16 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි හඳුනා ගැනීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක n වන පදය සඳහා වන සූත්‍රය භාවිත කිරීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක පළමු පද n වල ඓක්‍යය සම්බන්ධ සූත්‍ර භාවිත කිරීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිවල යෙදීම් සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

16.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි

මුලින් ම, ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගත් සමාන්තර ශ්‍රේඩි පිළිබඳ ව නැවත මතක් කර ගනිමු. පහත දැක්වෙන්නේ සමාන්තර ශ්‍රේඩියකි.

5, 7, 9, 11, ...

මෙහි ඕනෑ ම පදයකට 2 යන නියත අගය එකතු වී ඊට පසු පදය ලැබේ. එම නියත අගය, සමාන්තර ශ්‍රේඩියේ පොදු අන්තරය ලෙස හැඳින්විණි.
දැන් පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

මෙම අනුක්‍රමයේ පළමු පදය 3 වේ. පළමු පදය 2න් ගුණ වීමෙන්, දෙවන පදය ද, දෙවන පදය 2න් ගුණ වීමෙන් තෙවන පදය ද ආදී වශයෙන් ලැබෙන බව පැහැදිලි ය.

එනම්, ඕනෑ ම පදයක් 2 යන නියත අගයෙන් ගුණ වී ඊට පසු පදය ලැබේ. වෙනත් ලෙසකින් කිව හොත් පළමු පදය හැර වෙනත් ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට 2 යන නියත පදය ලැබේ. මෙවැනි ශ්‍රේඩි **ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩි** ලෙස හැඳින්වේ. එම ගුණ වන නියත අගයට ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ **පොදු අනුපාතය** යැයි කියනු ලැබේ. ඒ අනුව, මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ පොදු අනුපාතය 2 වේ.

මේ අනුව, සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් දී ඇති විට, එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් දැයි පරීක්ෂා කිරීම පහත පරිදි සිදු කළ හැකි ය. දෙවන පදය, පළමු පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. තුන්වන පදය, දෙවන පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. හතරවන පදය තුන්වන පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. මේ ආදී වශයෙන් කර ගෙන යෑමේ දී එක ම අගය සටහන් වේ නම්, එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියකි. එසේ එක ම අගයක් ලැබේ නම්, එම සටහන් කර ගන්නා අගය **පොදු අනුපාතය** බව ඔබට පැහැදිලි විය යුතු ය.

නිදසුන 1

2, 6, 18, 54, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{18}{6} = 3, \qquad \frac{54}{18} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

$\therefore$ ඉහත සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් වේ. තව ද එහි පොදු අනුපාතය 3 වේ.

නිදසුන 2

200, 100, 50, 20, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

සෑම විට ම නියත අගයක් නොලැබෙන නිසා මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් නො වේ.

නිදසුන 3

5, – 10, 20, – 40, 80, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{-10}{5} = -2, \qquad \frac{20}{-10} = -2, \qquad \frac{-40}{20} = -2, \qquad \frac{80}{-40} = -2$$

$$\therefore \quad \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \frac{80}{-40} = -2$$

$\therefore$ මෙම සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය පොදු අනුපාතය – 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියකි.

නිදසුන 4

4, x, 16 යන පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක අනුයාත ව පිහිටයි නම්, x හි අගය සොයන්න.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක පිහිටයි නම්, $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ වේ. මෙම සමීකරණය විසඳීමෙන් අවශ්‍ය x අගය ලැබේ.

$\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ නම් $x^2 = 64.$

එනම් $x^2 - 8^2 = 0$

එනම් $(x - 8)(x + 8) = 0$

එනම්, $x = 8$ හෝ $x = -8$

දැන් මෙම එක් එක් අගය සඳහා 4, x, 16 යන පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටන්නේ දැයි බලමු.
$x = 8$ විට, 4, 8, 16 යනු පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
$x = -8$ වන විට, 4, -8, 16 යනු පොදු අනුපාතය -2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.

16.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි තෝරා ලියන්න.

(a) 2, 4, 8, ... **(b)** $-6, -18, -54, \ldots$ **(c)** 64, 32, 16, 8, ...
(d) 5, 10, 30, 120, ... **(e)** $-2, 6, -18, 54, \ldots$ **(f)** $81, 27, 3, \frac{1}{9}, \ldots$
(g) 0.0002, 0.002, 0.02, 0.2, ... **(h)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{72}, \ldots$

16.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

මුල් පදය a හා පොදු අන්තරය d වූ සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = a + (n-1)d$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගත්තේ ය. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය සඳහා ද සූත්‍රයක් ලබා ගන්නා අයුරු දැන් සලකා බලමු.
ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය "a" හා පොදු අනුපාතය "r" යන සංකේතවලින් ලියා දක්වමු. තව ද එහි n වන පදය T_n වලින් දක්වමු. නිදසුනක් ඇසුරෙන් T_n සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගන්නා අයුරු සලකා බලමු.

2, 6, 18, 54, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකා බලමු. මෙම ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය (a) 2 සහ පොදු අනුපාතය (r) 3 වේ.

එවිට,

$$T_1 = 2 = 2 \times 1 = 2 \times 3^{1-1}$$
$$T_2 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 3^{2-1}$$
$$T_3 = 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{3-1}$$
$$T_4 = 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{4-1}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

එම පද පළමු පදය (a) සහ පොදු අනුපාතය (r) ඇසුරෙන් දැක්වූ විට

$$T_1 = 2 \times 3^0 = a \times r^{1-1}$$
$$T_2 = 2 \times 3^1 = a \times r^{2-1}$$
$$T_3 = 2 \times 3^2 = a \times r^{3-1}$$
$$T_4 = 2 \times 3^3 = a \times r^{4-1}$$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මෙම රටාව අනුව, n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ ලෙස දැක්විය හැකි බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ මගින් ලබා දෙයි.

නිදසුන 1

මුල් පදය 3 හා පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය සොයන්න.

$$a = 3,\ r = 2,\ n = 5$$

$$\begin{aligned} T_n &= ar^{n-1} \\ T_5 &= 3 \times 2^{5-1} \\ &= 3 \times 2^4 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 48 \end{aligned}$$

එමනිසා, පස් වන පදය 48 වේ.

නිදසුන 2

81, 27, 9, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පස් වන පදය හා හත් වන පදය සොයන්න.

$$a = 81$$

$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} T_5 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 81 \times \frac{1}{81} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_7 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 81 \times \frac{1}{729} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

එමනිසා, පස් වන පදය 1 ද හත් වන පදය $\frac{1}{9}$ ද වේ.

16.2 අභ්‍යාසය

1. පළමු පදය 5 සහ පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

2. පළමු පදය 4 සහ පොදු අනුපාතය -2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය හා 8 වන පදය සොයන්න.

3. පළමු පදය -2 ද පොදු අනුපාතය -3 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 4 වන පදය සහ 7 වන පදය සොයන්න.

4. පළමු පදය 1000 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{5}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

5. 0.0002, 0.002, 0.02,... ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

6. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2},...$ ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය සොයන්න.

7. 75, $-$ 30, 12,... ශ්‍රේඪියේ 4 වන පදය සොයන්න.

8. 192, 96, 48,... ශ්‍රේඪියේ 7 වන පදය සොයන්න.

9. 0.6, 0.3, 0.15,... ශ්‍රේඪියේ 9 වන පදය සොයන්න.

10. 8, 12, 18,... ශ්‍රේඪියේ 10 වන පදය සොයන්න.

16.3 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක, පළමු පදය (a), පොදු අනුපාතය (r), n වන පදය T_n හා n අගයන් අතුරින් එකක් හැර ඉතිරි අගය දී ඇති විට, එම අගය $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රයට ආදේශ කිරීමෙන් ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය.

ඒ සඳහා නිදසුන් කීපයක් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

පොදු අනුපාතය 3 ද 4 වන පදය 54 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

$$r = 3,\ n = 4,\ T_n = 54$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore\ T_4 = a \times (3)^{4-1}$$

$$\therefore\ 54 = a \times (3)^3$$

$$\therefore\ 54 = a \times 27$$

$$\therefore\ a = \frac{54}{27}$$

$$= 2$$

ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය 2 වේ.

නිදසුන 2

පළමු පදය 5 සහ 7 වන පදය 320 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයා, එහි මුල් පද 5 සොයන්න.

$$a = 5,\ n = 7,\ T_7 = 320$$
$$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_7 = 5 \times (r)^{7-1}$$
$$\therefore\ 320 = 5 \times (r)^6$$
$$\therefore\ r^6 = \frac{320}{5}$$
$$= 64$$
$$= (+2)^6 \text{ හෝ } (-2)^6$$
$$\therefore\ r = 2 \text{ හෝ } -2$$

පොදු අන්තරයට අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා ඉහත අවශ්‍යතාවලට සරිලන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී දෙකක් පවතී.

$r = 2$ වූ ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ 5, 10, 20, 40, 80 වේ.
$r = -2$ වූ ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ 5, –10, 20, – 40, 80 වේ.

නිදසුන 3

පළමු පදය 64 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{4}$ වූ ශ්‍රේඪියේ $\frac{1}{64}$ වන්නේ කීවන පදය ද?

$$a = 64,\ r = \frac{1}{4},\ T_n = \frac{1}{64}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$
$$\frac{1}{64} = 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64 \times 64}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{4^6}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^6$$
$$(n-1) = 6$$
$$n = 6 + 1$$
$$= 7$$

$\therefore\ \frac{1}{64}$ වන්නේ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 7 වන පදය යි.

නිදසුන 4

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 160 සහ 6 වන පදය 1215 වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$$a = 160,\ T_6 = 1215,\ n = 6$$

$$T_n = ar^{(n-1)}$$

$$1215 = 160\,(r)^{6-1}$$

$$160r^5 = 1215$$

$$\therefore \quad r^5 = \frac{1215}{160}$$

$$= \frac{243}{32}$$

$$= \frac{3^5}{2^5}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\therefore\ r = \frac{3}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය $1\frac{1}{2}$ වේ.

එසේම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ ඕනෑම පද දෙකක් දී ඇති විට $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් පළමු පදය සහ පොදු අන්තරය සෙවිය හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 5

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 3 වන පදය 48 ද 6 වන පදය 3072 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය ද පළමු පදය ද සොයන්න.

මුලින් ම, දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් සමීකරණ දෙකක් ගොඩනගමු.

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_3 = ar^{(3-1)}$$

$$ar^2 = 48 \quad \text{——— ①}$$

$$T_6 = ar^{(6-1)}$$

$$ar^5 = 3072 \quad \text{——— ②}$$

මෙම 1 හා 2 සමීකරණවල a හා r යන විචල්‍ය දෙක ම අඩංගු ය. එයින් a විචල්‍යය ඉවත් කර ගැනීම පහසු ය. ඒ සඳහා මෙම සමීකරණ දෙක බෙදමු.

② ÷ ①
$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{3072}{48}$$
$$r^3 = 64$$
$$r^3 = 4^3$$
$$r = 4$$

$r = 4$ ① ට ආදේශයෙන්
$$ar^2 = 48$$
$$a\,(4)^2 = 48$$
$$16a = 48$$
$$a = \frac{48}{16}$$
$$a = 3$$

ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $= 3$

පොදු අනුපාතය $= 4$

නිදසුන 6

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 6 වන පදය -8 ද 10 වන පදය -128 ද වේ.

(i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

(i) $T_n = ar^{(n-1)}$
$$T_6 = ar^{(6-1)}$$
$$ar^5 = -8 \quad \text{①}$$
$$T_{10} = ar^{(10-1)}$$
$$ar^9 = -128 \quad \text{②}$$

② ÷ ①
$$\frac{ar^9}{ar^5} = \frac{-128}{-8}$$
$$r^4 = 16$$
$r^4 = 2^4$ හෝ $(-2)^4$

$r = 2$ හෝ -2

පොදු අනුපාතයට අගයන් දෙකක් ලැබෙන බැවින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් පවතී.

(ii) $r = 2$, ① ට ආදේශයෙන්
$$ar^5 = -8$$
$$a\,(2)^5 = -8$$
$$a \times 32 = -8$$
$$a = \frac{-8}{32}$$
$$a = -\frac{1}{4}$$

$r = 2$ සහ $a = -\frac{1}{4}$ වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4$ වේ.

$r = -2$, ① ට ආදේශයෙන්

$$ar^5 = -8$$
$$a(-2)^5 = -8$$
$$a \times (-32) = -8$$
$$a = \frac{-8}{-32}$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$r = -2$ සහ $a = \frac{1}{4}$ වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4$ වේ.

16.3 අභ්‍යාසය

1. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය 3 සහ 4 වන පදය 108 වේ. ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

2. 6 වන පදය 1701 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය සොයන්න.

3. පොදු අනුපාතය $\frac{1}{2}$ සහ 8 වන පදය 96 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

4. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 5 ද, 4 වන පදය 135 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 7 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වේ. 448 වන්නේ ශ්‍රේඪියේ කීවන පදය ද?

6. පළමු පදය $\frac{1}{32}$ ද පොදු අනුපාතය 2 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 256 වන්නේ කීවන පදය ද?

7. පළමු පදය 27 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{2}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක $3\frac{5}{9}$ වන්නේ කීවන පදය ද?

8. පළමු පදය 8 ද 6 වන පදය -256 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

9. පළමු පදය 64 ද 9 වන පදය $\frac{1}{4}$ ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද තුන ලියා දක්වන්න.

10. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 4 වන පදය 48 ද 7 වන පදය 384 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සහ පළමු පදය සොයන්න.

11. 3 වන පදය -45 සහ පස්වන පදය -1125 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

12. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 4 වන පදය 100 ද 9 වන පදය $3\frac{1}{8}$ ද වේ. ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ ලියන්න.

13. පස්වන පදය 40 ද 9 වන පදය 640 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

16.4 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n වල ඓක්‍යය

මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n හි ඓක්‍යය S_n මගින් දක්වමු. S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

$T_1 = a,\ T_2 = ar,\ T_3 = ar^2,\ T_4 = ar^3,\ ....,\ T_n = ar^{(n-1)}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n$

$\therefore\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{(n-1)}$ —— ① ලෙස ලිවිය හැකි ය.

S_n සඳහා සූත්‍රය ගොඩනැගීමේ දී යොදා ගන්නා උපක්‍රමය මෙසේ ය. මුලින් ම, ① සමීකරණයේ දෙපස ම r වලින් ගුණ කරමු. එවිට,

$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$ —— ② ලෙස ලැබේ.

දැන්, ② සමීකරණයෙන් ① සමීකරණය අඩු කරමු. එවිට,
$r\,S_n - S_n = ar^n - a$ (දකුණු පස බොහෝ පද අවලංගු වී යන බව නිරීක්ෂණය කරන්න)

$$\therefore\ S_n\,(r-1) = a\,(r^n - 1)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{(r-1)} \qquad (r \neq 1)$$

මෙය, a, r, n හා S_n අඩංගු සූත්‍රයයි. මෙම සූත්‍රයේ හරය හා ලවය -1 න් ගුණ කිරීමෙන් සූත්‍රය වෙනත් හැඩයකින් ද මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

S_n සඳහා $S_n = \dfrac{a\,(r^n-1)}{(r-1)}$ සහ $S_n = \dfrac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$

යන සූත්‍ර දෙකෙන් ඕනෑ ම එකක් භාවිත කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

2, 6, 18, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.

මුලින් ම පද සොයා එකතු කිරීමෙන් ඓක්‍යය සොයමු.

$T_1 = 2$, $T_2 = 6$ හා $T_3 = 18$ ලෙස දී ඇත.

තව ද,

$T_4 = 18 \times 3 = 54$ ද

$T_5 = 54 \times 3 = 162$ ද වේ.

එමනිසා, $S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

$= 242$

දැන් $S_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් ඓක්‍යය සොයමු.

$a = 2,\ r = \dfrac{6}{2} = 3,\ n = 5$ නිසා

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{2\,(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2\,(243 - 1)}{2}$$

$$= \frac{2 \times 242}{2}$$

$$= 242$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය 242 වේ.

පදවල අගයන් විශාල වන විට දී හෝ පද ගණන විශාල වන විට දී සූත්‍රය භාවිතය වඩා පහසු ය.

නිදසුන 2

120, – 60, 30, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සොයන්න. ඒ සඳහා සූත්‍රය භාවිත කරමු.

$a = 120,\ r = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2},\ n = 6$ නිසා

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ හි ආදේශයෙන්,

$$S_6 = \frac{120\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{120\left[1-\left(\frac{1}{64}\right)\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \div \frac{3}{2}$$

$$= \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{315}{4}$$

$$= 78\frac{3}{4}$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය $78\frac{3}{4}$ වේ.

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ සූත්‍රයේ අඥාත හතරක් ඇත. ඒවා නම් a, r, n හා S_n ය. මෙම අඥාතවලින් ඕනෑ ම තුනක් දුන් විට ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය. දැන් එවැනි නිදසුනක් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

5, 15, 45, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල්පදවල ඓක්‍යය 1820 වීමට එකතු කළ යුතු පද ගණන සොයන්න.

$$a = 5, \ r = \frac{15}{5} = 3, \ S_n = 1820$$

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$1820 = \frac{5\,(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$1820 = \frac{5\,(3^n - 1)}{2}$$

$$2 \times 1820 = 5\,(3^n - 1)$$

$$\frac{2 \times 1820}{5} = 3^n - 1$$

$$728 = 3^n - 1$$

$$1 + 728 = 3^n$$

$$729 = 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

එකතු කළ යුතු පද ගණන 6 කි.

16.4 අභ්‍යාසය

1. පළමු පදය 4 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

2. 2, 8, 32, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සොයන්න.

3. පළමු පදය 72 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි එකතුව සොයන්න.

4. 3, – 6, 12, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 7 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. 18, 12, 8, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. 18, 6, 2, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි ඓක්‍යය $26\frac{26}{27}$ බව පෙන්වන්න.

7. 2, 4, 8, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද යම් ගණනක ඓක්‍යය 2046 වේ නම්, එම පද ගණන සොයන්න.

8. පළමු පදය 4 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදවල ඓක්‍යය 1020 වීමට එකතු කළ යුතු පද සංඛ්‍යාව සොයන්න.

9. 3, – 12, 48, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදවල ඓක්‍යය 9831 වීම සඳහා එකතු කළ යුතු පද ගණන සොයන්න.

16.5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීම

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී සම්බන්ධ ව, ඉහත නිදසුන් මගින් සාකච්ඡා නොකළ විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳන අයුරු නිදසුන් කීපයක් මගින් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක පළමු හා දෙවන පදවල එකතුව 9 වේ. 4 වන පදයේ සහ 5 වන පදයේ එකතුව – 72 වේ. ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 5 ලියන්න.

$T_1 = a, \; T_2 = ar$

$a + ar = 9$

$a(1 + r) = 9$ ——— ①

$T_4 = ar^3, \; T_5 = ar^4$

$ar^3 + ar^4 = -72$

$ar^3(1 + r) = -72$ ——— ②

② ÷ ① $\quad \dfrac{ar^3(1 + r)}{a(1 + r)} = \dfrac{-72}{9}$

$r^3 = -8$

$r^3 = (-2)^3$

$r = -2$

$r = -2$, ① ආදේශයෙන්

$a[1 + (-2)] = 9$

$a \times (-1) = 9$

$a = -9$

ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද පහ

–9, 18, –36, 72, –144 වේ.

නිදසුන 2

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද තුන පිළිවෙළින් $(x + 2)$, $(x + 12)$, $(x + 42)$ වේ. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය සහ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$$r = \frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$\frac{x+12}{x+2} = \frac{x+42}{x+12}$$

$$(x+12)(x+12) = (x+2)(x+42)$$
$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 44x + 84$$
$$144 - 84 = 20x$$
$$60 = 20x$$
$$x = \frac{60}{20}$$
$$x = 3$$

ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 3

$(3 + 2), (3 + 12), (3 + 42)$

$5, 15, 45$

ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $= 5$

ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය $= \frac{15}{5}$

$= 3$

16.5 අභ්‍යාසය

1. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක දෙවන හා තුන්වන පදවල එකතුව 21 හා පස්වන සහ හයවන පදවල එකතුව 168වේ. ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

2. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද තුන පිළිවෙළින් 4, $(x + 3)$ සහ $(x + 27)$ වේ.
  (i) xවල අගය සොයන්න.
  (ii) දී ඇති අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල්පද 4 ලියන්න.

3. ශ්‍රේඪියක මුල් පද nවල ඓක්‍යය $4\,(3^n - 1)$ වේ.
  (i) ශ්‍රේඪිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව පෙන්වන්න.
  (ii) එහි මුල් පද 4 ලියන්න.

4. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය, තුන්වන පදය හා 6 වන පදය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 3 වේ. සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය 15 නම්, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

5. ශ්‍රේඪියක n වන පදය $3(2)^{n+1}$ වේ.
  (i) ශ්‍රේඪිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව පෙන්වන්න.
  (ii) ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.

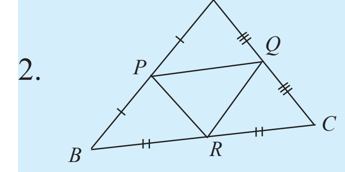
6. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 9වේ. එහි මුල් පද තුනෙහි එකතුව 7 වේ.
  (i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
  (ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස - 2 වන වාරය

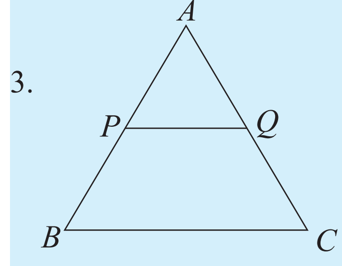
I කොටස

1. 5, 3, 7, 13, 11, 9, 7, 10, 2, 3, 7 යන සංඛ්‍යා සමූහයේ,

   (i) මාතය (ii) මධ්‍යස්ථය (iii) මධ්‍යන්‍යය (iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය
   ලියන්න.



2. ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 24 cm නම් PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය කීය ද?



3. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය P හා Q වේ. APQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 21 cm නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය කීය ද?

4. කොටස් වෙළඳපොළ සමග ගනුදෙනු කරන ව්‍යාපාරිකයෙක්, එක්තරා සමාගමක කොටස්, එම කොටසක වෙළඳ පොළ මිල රු 50 ක් ව තිබිය දී, මිල දී ගත්තේ ය. පසුව එම කොටසක මිල රුපියල් 58ක් වූ විට, ඔහු එම කොටස් විකුණන ලදි. මෙම ආයෝජනයෙන් ව්‍යාපාරිකයා ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභ ප්‍රතිශතය සොයන්න.

5. කවිඳු අත්පිට මුදලට රුපියල් 15000 ක් වූ භාණ්ඩයක්, මුලින් රුපියල් 3000 ක් ගෙවා හීනවන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ලබා ගත්තේ ය. ඉතිරි මුදල මසකට රුපියල් 1464 බැගින් වූ සමාන මාසික වාරික 10 කින් ගෙවා ණයෙන් නිදහස් විය. භාණ්ඩය සඳහා ගෙවා ඇති මුළු මුදල සොයන්න.

6. $x^2 - ax + 18 = 10$ හි එක් මූලයක් $x = 2$ නම්

   (i) a හි අගය සොයන්න.

   (ii) සමීකරණයේ අනිත් මූලය සොයන්න.

7. $(x - 2)^2 = x - 2$ නම් x හි විසඳුම් සොයන්න.

8. $3x^2 - 27 = 0$ හි විසඳන්න.

9. අනුගාමී ධන සංඛ්‍යා දෙකක වර්ගයන්ගේ එකතුව 145 කි. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

10. $y = x^2 + 6x + 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය නොඇඳ,

(i) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය

(ii) ශ්‍රිතයේ අවම අගය

සොයන්න.

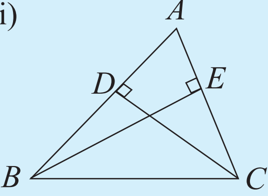
11. $y = (x - 2)(x + 1)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල x හි ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

12. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}$ හා $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}$ නම් x හා y හි අගයයන් සොයන්න.

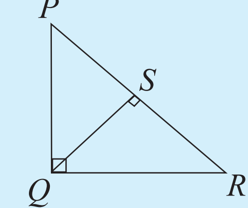
13. $T_n = 2 \times 3^n$ මගින් දැක්වෙන්නේ කවර වර්ගයේ ශ්‍රේඩීයක් දැයි හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

14. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 4$ cm වේ. x යනු BC පාදය මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි. AX හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P නම්, P හි පථය විස්තර කරන්න.

15. (i)



(ii)



රූප සටහන,

(i) හි ABE හා ADC ත්‍රිකෝණ යුගලය

(ii) හි PQS හා QSR ත්‍රිකෝණ යුගලය සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

II කොටස

1. සෘජුකෝණාස්‍රයක දිග ඒකක 6 කින් අඩුකර, පළල ඒකක 2කින් වැඩි කළ විට, එහි වර්ගඵලය මුල් වර්ගඵලයට වඩා වර්ග ඒකක 12කින් අඩු වේ. සෘජුකෝණාස්‍රයේ මුල් දිග හා පළල පිළිවෙලින් x හා y ලෙස ගෙන

(i) දෙවන සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග හා පළල x හා y ඇසුරෙන් දක්වන්න.
(ii) දෙවන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය x හා y ඇසුරෙන් දක්වන්න.
(iii) x හා y ඇතුළත් සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(iv) මුල් සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග එහි පළල මෙන් තුන් ගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.
(v) මුල් සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 192 ක් නම් එහි දිග හා පළල සොයන්න.

2. පොදු අනුපාතය ධන අගයක් ගන්නා ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයක තුන්වන පදය, දෙවන පදයට වඩා 3කින් ද පස්වන පදය, හතරවන පදයට වඩා 12කින් ද වැඩි වේ.

(i) ශ්‍රේඪීයේ පොදු අනුපාතය හා මුල් පදය සොයන්න.
(ii) ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ ලියා දක්වන්න.
(iii) ශ්‍රේඪියේ n වන පදය $3 \times 2^{n-2}$ බව පෙන්වන්න.

3. කොටස් වෙළඳ පොළේ මුදල් ආයෝජනය කරන්නෙක්, ලාභාංශ ලෙස වාර්ෂිකව කොටසකට රු 1.25 බැගින් ගෙවන A නම් සමාගමේ කොටස් 5000 ක් ද, වාර්ෂිකව කොටසකට රු 1.50 ක් බැගින් ගෙවන B නම් සමාගමේ කොටස් යම් ප්‍රමාණයක් ද වෙනුවෙන් මුදල් ආයෝජනය කර තිබුණි. A හා B සමාගම්වල කොටසක වෙළඳ පොළ මිල පිළිවෙලින් රුපියල් 30 හා 35 වූ අවස්ථාවක, ඔහු සතු එම සමාගම්වල සියලුම කොටස් විකුණා වාර්ෂිකව කොටසකට රු 2.50 බැගින් ගෙවන C නම් සමාගමේ කොටස් රුපියල් 50 බැගින් මිල දී ගත්තේ ය. ඉන් ඔහුගේ ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 12750 ක් විය.

(i) B සමාගමේ ඔහු සතුව තිබූ කොටස් ගණන සොයන්න.
(ii) නව ආයෝජනයෙන් ඔහුගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 2000කින් වැඩි වූ බව පෙන්වන්න.

4. මිනිසෙක් 8% වාර්ෂික වැල් පොළී අනුපාතිකයක් යටතේ අවුරුදු දෙකකින් ගෙවා අවසන් කිරීමේ පොරොන්දුව මත, රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත්තේ ය. එහෙත් ඔහුට අවුරුදු දෙක අවසානයේ පොරොන්දුව අනුව, ණය ගෙවා දැමීමට නොහැකි විය. ණය හිමියාට අවුරුදු දෙක අවසානයේ, රුපියල් 6000ක් ගෙවා දැමූ ඔහු තවත් ඉදිරියට අවුරුද්දකින්, පොළියත් සමඟ ණය ගෙවා අවසන් කිරීමටත්, පොරොන්දු වූ පොළියට වඩා වැඩි පොළියක් එම අවුරුද්ද සඳහා ගෙවීමටත් ණය හිමියා එකඟ කරවා ගත්තේ ය.

(i) පළමු අවුරුද්ද අවසානයේ ගෙවීමට නියමිත පොළිය ගණනය කරන්න.
(ii) දෙවන අවුරුද්ද අවසානයේ ණය නිදහස් වීමට නම් ගෙවිය යුතු මුළු මුදල ගණනය කරන්න.
(iii) තුන්වන අවුරුද්ද ආරම්භයේ දී, ගෙවීමට ඉතිරිවන මුදල කීයද?
(iv) තුන්වන අවුරුද්ද අවසානයේ පොරොන්දු වූ පරිදි රුපියල් 6230.40 ක් ගෙවා ණයෙන් නිදහස් වූයේ නම්, තුන්වන අවුරුද්ද සඳහා ගෙවා ඇති පොළී අනුපාතිකය සොයන්න.

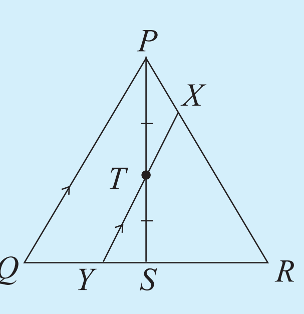
5. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AC විකර්ණයට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ DC පාදයට E හිදි හමු වේ. AE හා BC රේඛා P හිදී ද AC හා BD විකර්ණ Q හිදී ද කැපී යයි.

(i) ඉහත දත්ත ඇතුළත් දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $ABEC$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(iii) $PQ = \frac{1}{4}\ DE$ බව සාධනය කරන්න.

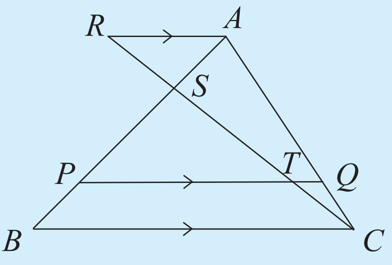
6. PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S වේ. PS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වන අතර T හරහා PQ ට සමාන්තරව ඇඳි රේඛාව, PR පාදය X හිදී ද QR පාදය Y හිදී ද හමුවේ.



(i) $YT = \frac{1}{2}\ PQ$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $XY = \frac{3}{4}\ PQ$ බව සාධනය කරන්න.

7. (a) දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත



(i) $A\hat{P}B$ ට සමාන කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) BPS හා BQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $BP : BQ = BS : BR$ බව සාධනය කරන්න.

(b) දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත

(i) $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\frac{PQ}{BC} = \frac{RT}{RC}$ බව සාධනය කරන්න.

8. (a) $y = x\,(x - 2)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-3 \leq x \leq 5$ තුළ අගය වගුවක් සකස් කරන්න.

(b) x හා y අක්ෂ සඳහා සුදුසු පරිමාණයක් යොදා ගනිමින් $y = x\,(x - 2)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(c) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

(i) ප්‍රස්තාරයේ සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය

(ii) ශ්‍රිතයේ අවම අගය

(iii) ශ්‍රිතයේ අගය 0 වන්නා වූ x හි අගයයන්

(iv) $x\,(x - 2) = 0$ හි මූලයන්

(v) ශ්‍රිතය සෘණ වන්නා වූ x හි අගය පරාසය ලියා දක්වන්න.

(d) $y = x^2$ ප්‍රස්තාරය ඇඳ, ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් $\sqrt{2}$ හි අගය ආසන්න පලමු දශමස්ථානයට සොයන්න.

පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාව

අ		
අවම අගය	குறைந்த பெறுமானம்	Minimum value
අඥාතය	தெரியாக் கணியம்	Unknown
අනුමේය	ஏறிகள்	Rider
උ		
උපරිම අගය	கூடிய பெறுமானம்	Maximum value
ගු		
ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී	பெருக்கல் விருத்தி	Geometric progression
ජ		
ජාල රේඛය	வலையுரு வரையம்	Histogram
ද		
දත්ත	தரவு	Data
ප		
පන්තියක තරම	வகுப்பின் பருமன்	Class width
පන්ති මායිම්	வகுப்பு ஓரங்கள்	Class Boundaries
පන්ති සීමා	வகுப்பு எல்லைகள்	Class Limits
පසු පදය	அடுத்துள்ள உறுப்பு	Successive Term
පන්ති ප්‍රාන්තර	வகுப்பாயிடை	Class intervals
පළමුවන පදය	முதலாம் உறுப்பு	First Term
පරාසය / ප්‍රාන්තරය	வீச்சு	Range
පෙර පදය	அடுத்து வரும் உறுப்பு	Preceding Term
පොදු අනුපාතය	பொது விகிதம்	Common Ratio
ම		
මාස ඒකක ගණන	மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை	Number of month units
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය	நடுப்புள்ளி	Mid point
ව		
වර්ග පූරණය	வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல்	Completing the Square
වර්ගජ සමීකරණ	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	Quadratic Equation
වසම	ஆட்சி	Domain
වාරිකය	தவணைகள்	Instalment
වැල් පොලිය	கூட்டு வட்டி	Compound Interest
විලෝමය	மறுதலை	Converse
විවික්ත දත්ත	பின்னமான தரவுகள்	Discrete data
විසඳුම	தீர்வுகள்	Solutions
ශ		
ශ්‍රිතය	சார்பு	Function
ස		
සංඛ්‍යා අනුක්‍රම	எண் தொடரி	Number Sequence
සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය	மீடிறன் பல்கோணி	Frequency polygon
සංඛ්‍යාතය	மீடிறன்	Frequency
සංගුණකය	குணகம்	Coefficient
සත්‍යාපනය	வாய்ப்புப் பார்த்தல்	Verification
සාධනය	நிறுவல்	Proof
සන්තතික දත්ත	தொடரான தரவுகள்	Continuous data
සමගාමී සමීකරණ	ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்	Simultaneous equations
සමමිති අක්ෂය	சமச்சீர் அச்சு	Axis of symmetry
සමානුපාතික	விகித சமனான	Proportional
සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය	திரள் மீடிறன்	Cumulative Frequency
සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය	திரள் மீடிறன் வரைபு	Cumulative Frequency curve
හ		
හීනවන ශේෂය	குறைந்து செல்லும் மீதி	Reducing Balance
හැරුම් ලක්ෂ්‍යය	திரும்பற் புள்ளி	Turning point

පාඩම් අනුක්‍රමය

පෙළපොතේ පරිච්ඡේදය	කාලච්ඡේද ගණන
1 වාරය	
1. තාත්වික සංඛ්‍යා	10
2. දර්ශක හා ලඝුගණක I	08
3. දර්ශක හා ලඝුගණක II	06
4. ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	05
5. ඝන වස්තුවල පරිමාව	05
6. ද්විපද ප්‍රකාශන	04
7. වීජීය භාග	04
8. සමාන්තර රේඛා අතර තලරූපවල වර්ගඵලය	12
2 වාරය	
09. ප්‍රතිශත	06
10. කොටස් වෙළෙඳපොළ	05
11. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය	05
12. ප්‍රස්තාර	12
13. සමීකරණ	10
14. සමකෝණික ත්‍රිකෝණ	12
15. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය	12
16. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී	06
3 වාරය	
17. පයිතගරස් ප්‍රමේයය	04
18. ත්‍රිකෝණමිතිය	12
19. න්‍යාස	08
20. අසමානතා	06
21. වෘත්ත චතුරස්‍ර	10
22. ස්පර්ශක	10
23. නිර්මාණ	05
24. කුලක	06
25. සම්භාවිතාව	07

ගණිතය

11 ශ්‍රේණිය

III කොටස

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව



පළමුවන මුද්‍රණය - 2015
දෙවන මුද්‍රණය - 2016
තුන්වන මුද්‍රණය - 2017
හතරවන මුද්‍රණය - 2018

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
හොරණ, මිදෙල්ලමුලහේන, තල්ගහවිල පාර, අංක 65C හි පිහිටි
සී/ස කරුණාරත්න සහ පුත්‍රයෝ (පුද්ගලික) සමාගමෙහි
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත්කරන ලදි.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා

ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා

අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා

පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා

නමෝ නමෝ මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

ඔබ වේ අප විද්‍යා - ඔබ ම ය අප සත්‍යා

ඔබ වේ අප ශක්ති - අප හද තුළ භක්ති

ඔබ අප ආලෝකේ - අපගේ අනුප්‍රාණේ

ඔබ අප ජීවන වේ - අප මුක්තිය ඔබ වේ

නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා

ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා

එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා

යමු යමු වී නොපමා

ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා

අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

තිළිණය ලෙසින් රජයෙන් මේ පොත ලදිමි
කියවා එයින් නැණ ගුණ එළි කර ගනිමි
මගෙ රට වෙනුවෙන් ම දෑ සම්පත් රකිමි
මේ පොත එන වසරෙ වෙන කෙනකුට පුදමි

அரசின் வெகுமதியாய் நூலிதனைப் பெற்றேன்
அறிவு பெருகிடவே நூலிதனைக் கற்பேன்
தாய் நாட்டின் வளமெனவும் நூலிதனைக் காப்பேன்
பல மாணவரும் பயின்றிடவே நூலிதையே அளிப்பேன்

From the government, I received this as a gift
I’ll read it, light up my knowledge and practise thrift
On my country’s own behalf, I’ll protect the national resources
And offer this book to another one as a fresh garland of roses



"අලුත් වෙමින්, වෙනස් වෙමින්, නිවැරදි දැනුමෙන්
රටට වගෙ ම මුළු ලොවට ම වෙන්න නැණ පහන්"

<u>ගරු අධ්‍යාපන අමාත්‍යතුමාගේ පණිවුඩය</u>

ගෙවී ගිය දශක දෙකකට ආසන්න කාලය ලෝක ඉතිහාසය තුළ සුවිශේෂී වූ තාක්ෂණික වෙනස්කම් රැසක් සිදුවූ කාලයකි. තොරතුරු තාක්ෂණය, සන්නිවේදනය ප්‍රමුඛ කරගත් සෙසු ක්ෂේත්‍රවල ශීඝ්‍ර දියුණුවත් සමඟ වත්මන් සිසු දරු දැරියන් හමුවේ නව අභියෝග රැසක් නිර්මාණය වී තිබේ. අද සමාජයේ පවතින රැකියාවල ස්වභාවය නුදුරු අනාගතයේ දී සුවිශේෂී වෙනස්කම් රැසකට ලක් වනු ඇත. එවන් වටපිටාවක් තුළ නව තාක්ෂණික දැනුම සහ බුද්ධිය කේන්ද්‍ර කරගත් සමාජයක වෙනස් ආකාරයේ රැකියා අවස්ථා ද ලක්ෂ ගණනින් නිර්මාණය වනු ඇත. ඒ අනාගත අභියෝග ජයගැනීම වෙනුවෙන්, ඔබ සවිබල ගැන්වීම අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මගේත්, අප රජයේත් ප්‍රමුඛ අරමුණයි.

නිදහස් අධ්‍යාපනයේ මාහැඟි ප්‍රතිලාභයක් ලෙස නොමිලේ ඔබ අතට පත් වන මෙම පොත මනාව පරිශීලනය කිරීමත්, ඉන් අවශ්‍ය දැනුම උකහා ගැනීමත් ඔබේ ඒකායන අරමුණ විය යුතු ය. එමෙන් ම ඔබේ මවුපියන් ඇතුළු වැඩිහිටියන්ගේ ශ්‍රමයේ සහ කැපකිරීමේ ප්‍රතිඵලයක් ලෙස රජය විසින් නොමිලේ පාසල් පෙළපොත් ඔබ අතට පත් කරනු ලබන බව ද ඔබ වටහා ගත යුතු ය.

ලෝකය වේගයෙන් වෙනස් වන වටපිටාවක, නව ප්‍රවණතාවලට ගැළපෙන අයුරින් නව විෂය මාලා සකස් කිරීමටත්, අධ්‍යාපන පද්ධතිය තුළ තීරණාත්මක වෙනස්කම් සිදු කිරීම සඳහාත් රජයක් ලෙස අප කටයුතු කරන්නේ රටක අනාගතය අධ්‍යාපනය මතින් සිදු වන බව අප හොඳින් ම අවබෝධ කරගෙන සිටින බැවිනි. නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල භුක්ති විඳිමින්, රටට පමණක් නොව ලොවට ම වැඩදායී ශ්‍රී ලාංකික පුරවැසියකු ලෙස නැඟී සිටින්නට ඔබ ද අදිටන් කරගත යුතු වන්නේ එබැවිනි. ඒ සඳහා මේ පොත පරිශීලනය කිරීමෙන් ඔබ ලබන දැනුම ද ඉවහල් වනු ඇති බව මගේ විශ්වාසයයි.

රජය ඔබේ අධ්‍යාපනය වෙනුවෙන් වියදම් කරන අතිවිශාල ධනස්කන්ධයට වටිනාකමක් එක් කිරීම ද ඔබේ යුතුකමක් වන අතර, පාසල් අධ්‍යාපනය හරහා ඔබ ලබා ගන්නා දැනුම හා කුසලතා ඔබේ අනාගතය තීරණය කරන බව ද ඔබ හොඳින් අවබෝධ කර ගත යුතු ය. ඔබ සමාජයේ කුමන තරාතිරමක සිටිය ද සියලු බාධා බිඳ දමමින් සමාජයේ ඉහළ ම ස්තරයකට ගමන් කිරීමේ හැකියාව අධ්‍යාපනය හරහා ඔබට හිමි වන බව ද ඔබ හොඳින් අවධාරණය කර ගත යුතු ය.

එබැවින් නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල ලබා, ගෞරවනීය පුරවැසියකු ලෙස හෙට ලොව දිනන්නටත් දේශ දේශාන්තරවල පවා ශ්‍රී ලාංකේය නාමය බබළවන්නටත් ඔබට හැකි වේවා! යි අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මම ශුභ ප්‍රාර්ථනය කරමි.

අකිල විරාජ් කාරියවසම්

අධ්‍යාපන අමාත්‍ය

පෙරවදන

ලෝකයේ ආර්ථික, සමාජීය, සංස්කෘතික හා තාක්ෂණික සංවර්ධනයත් සමග අධ්‍යාපන අරමුණු වඩා සංකීර්ණ ස්වරූපයක් ගනී. මිනිස් අත්දැකීම්, තාක්ෂණික වෙනස්වීම්, මනෝවිද්‍යාත්මක පර්යේෂණ සහ අධ්‍යාපනය පිළිබඳ නව දර්ශක ඇසුරෙන් ඉගෙනීමේ හා ඉගැන්වීමේ ක්‍රියාවලිය ද නවීකරණය වෙමින් පවතී. එසේ වුව ද ශිෂ්‍ය අවශ්‍යතාවලට ගැළපෙන ලෙස ඉගෙනුම් අත්දැකීම් සංවිධානය කරමින් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය පවත්වාගෙන යාම සඳහා විෂය නිර්දේශයේ දැක්වෙන අරමුණුවලට අනුකූලව, විෂයානුබද්ධ කරුණු ඇතුළත්ව පෙළපොත සම්පාදනය වීම අවශ්‍ය ය. පෙළපොත ශිෂ්‍යයාට ඉගෙනීමේ උපකරණයක් පමණක් නොව ඉගෙනුම් අත්දැකීම් ලබාගැනීමට, අභියෝගතා වර්ධනයට, චර්යාමය හා ආකල්ප වර්ධනයක් වන පරිදි ඉහළ අධ්‍යාපනයක් ලැබීමට ඉවහල් වන ආශීර්වාදයකි.

රටට වැඩදායී, පූර්ණ පෞරුෂයකින් හෙබි, යහපත් පුරවැසියකු වීමේ පරිචය ලබා ගැනීමට මෙම පෙළපොත ඔබට උපකාරී වෙතැයි මම අපේක්ෂා කරමි.

මෙම පෙළපොත් සම්පාදනයට දායක වූ ලේඛක, සංස්කාරක හා ඇගයුම් මණ්ඩල සාමාජික මහත්ම මහත්මීන්ටත් අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයටත් මාගේ ස්තුතිය පළ කර සිටිමි.

ඩබ්ලිව්. ඩී. පද්මිණී නාලිකා
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව,
ඉසුරුපාය,
බත්තරමුල්ල.
2018.05.07

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

ඩබ්ලිව්. ඩී. පද්මිණී නාලිකා - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සංස්කාරක මණ්ඩලය

ආචාර්ය ඩී.කේ. මල්ලව ආරච්චි - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය රොමේන් ජයවර්ධන - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ශ්‍රී ධරන් - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
බී.ඩී. චිත්තානන්ද බියන්විල - අධ්‍යක්ෂ, ගණිතය අංශය, අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
ජී.පී.එච්. ජගත් කුමාර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

එච්.එම්.ඒ. ජයසේන - ගුරු උපදේශක, (විශ්‍රාමික)
වයි.වී.ආර්. විතාරම - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, දෙහිඕවිට
ඩබ්.එම්.ඩබ්.සී වලිසිංහ - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, කෑගල්ල
අජිත් රණසිංහ - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හෝමාගම
අනුර ඩී. වීරසිංහ - ගුරු උපදේශක, (පිරිවෙන්), මාතර දිස්ත්‍රික්කය
ඩබ්ලිව්.එම්.ඩී. ලාල් විජේකාන්ත - ගුරු සේවය, ශාන්ත තෝමස් විද්‍යාලය, ගල්කිස්ස
ආචාර්ය රෝචනා මීගස්කුඹුර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, පේරාදෙණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජේ. රත්නායක - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජයන්ත සේනාධීර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ආර්. ටී. සමරතුංග - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
අයි.එන්. වාගීෂමූර්ති - අධ්‍යක්ෂ (විශ්‍රමික)
ආර්.එස්.ඊ. පුෂ්පරාජන් - සහකාර අධ්‍යක්ෂ, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, පුත්තලම
වී. මුරලි - ගුරු අධ්‍යාපනඥ සේවය, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, වවුනියාව

භාෂා සංස්කරණය

ජයත් පියදසුන් - මාධ්‍යවේදී, කර්තෘ මණ්ඩලය - සිළුමිණ

සෝදුපත් කියවීම

ඩී.යූ. ශ්‍රීකාන්ත එදිරිසිංහ - ගුරු සේවය, ගොඩගම සුභාරතී මහාමාත්‍ය මහා විද්‍යාලය.

රූපසටහන් පිටකවර නිර්මාණය පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය

ආර්.ඩී. තිළිණි සෙව්වන්දි - පරිගණක සහායක,
බී.ටී. චතුරාණි පෙරේරා - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්පාදක මණ්ඩල සටහන

2015 වර්ෂයේ සිට ක්‍රියාත්මක වන නව විෂය නිර්දේශයට අනුකූලව මෙම පෙළපොත රචනා කර ඇත.

පෙළපොත සම්පාදනය කෙරෙන්නේ සිසුන් වෙනුවෙනි. එබැවින්, ඔබට තනිව කියවා වුව ද තේරුම් ගත හැකි පරිදි සරල ව සහ විස්තරාත්මක ව එය රචනා කිරීමට උත්සාහ ගත්තෙමු.

විෂය සංකල්ප ආකර්ශනීය අන්දමින් ඉදිරිපත් කිරීම සහ තහවුරු කිරීම සඳහා, විස්තර කිරීම්, ක්‍රියාකාරකම්, සහ නිදසුන් වැනි විවිධ ක්‍රම අනුගමනය කළෙමු. තව ද, අභ්‍යාස කිරීමේ රුචිකත්වය වර්ධනය වන පරිදි ඒවා සරල සිට සංකීර්ණ දක්වා අනුපිළිවෙළින් පෙළ ගස්වා තිබේ.

ගණිත විෂයයට අදාළ සංකල්ප දැක්වෙන පද, රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුව සම්පාදනය කරන ගණිතය පාරිභාෂික පදමාලාවට අනුකූලව භාවිත කළෙමු.

විෂය නිර්දේශයේ 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් ඉගෙන ගැනීමට මින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගත් යම් යම් විෂය කරුණු අවශ්‍ය වේ. එබැවින් එම පෙර දැනුම සිහි කිරීම පිණිස පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස සෑම පරිච්ඡේදයකම ආරම්භයේ දැක්වෙයි. ඒවා මගින් 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් සඳහා ඔබව සූදානම් කෙරෙනු ඇත.

ඊට අමතරව 10 ශ්‍රේණියේහි පෙළපොත සිසුන් ළඟ තිබෙන බැවින් පෙර දැනුම අවශ්‍ය වන විටදී එය ද භාවිතයට ගනු ඇතැයි අපි බලාපොරොත්තු වෙමු.

පන්තියේ දී ගුරුවරයා විසින් ඉගැන්වීමට පෙර, ඔබ මේ පරිච්ඡේද කියවීමෙන් සහ ඒ ඒ පරිච්ඡේදයේ එන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස කිරීමෙන්, මේ පොත භාවිතයෙන් උපරිම ඵල ලැබිය හැකි ය.

ගණිත අධ්‍යාපනය ප්‍රීතිමත් සහ ඵලදායක වන්නැයි අපි ප්‍රාර්ථනා කරමු.

සම්පාදක මණ්ඩලය

පටුන

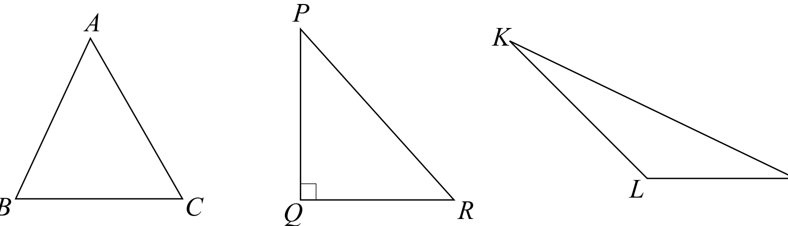
17 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- පයිතගරස් ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම්වල යෙදීමට හා අනුමේයයන් සාධනය කිරීමට
- පයිතගරස් ත්‍රිත්ව හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

හැඳින්වීම

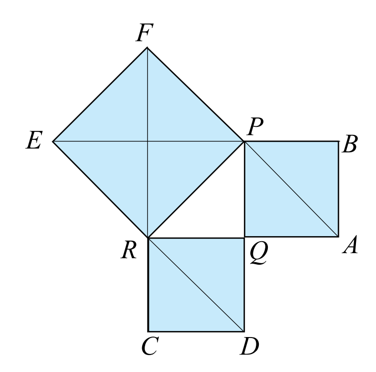


රූපයේ දැක්වෙන *ABC*, *PQR* හා *KLM* ත්‍රිකෝණ පිළිවෙළින් සුළු කෝණික, සෘජු කෝණික හා මහා කෝණික ත්‍රිකෝණ වේ. ඒවායේ ඇතුළත් කෝණවලින්, විශාලත ම කෝණය (හෝ කෝණ) අනුව එසේ වර්ග කර ඇත. මේ අනුව, *PQR* ත්‍රිකෝණයේ, $P\hat{Q}R$ සෘජුකෝණය එම ත්‍රිකෝණයේ විශාල ම කෝණයයි. එම කෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති *PR* පාදය ත්‍රිකෝණයේ දිගම පාදයයි. එය කර්ණය ලෙසත් ඉතිරි පාද දෙක වන *PQ* හා *QR*, සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක ලෙසත් හැඳින්වෙන බව අපි දනිමු.

බොහෝ ඈත කාලයක සිට ම මිනිසා ත්‍රිකෝණවල ජ්‍යාමිතික ගුණ පිළිබඳ ව දැන සිටි බවට සාක්ෂි අදටත් ඉතිරි ව පවතී. ක්‍රි.පූ. 3000 දී පමණ ඉදි වූ මිසර පිරමීඩ විශ්මය දනවන නිර්මාණ බව සැම දෙනාගේ ම පිළිගැනීමයි. එම නිර්මාණකරණය සඳහා ජ්‍යාමිතික දැනුම, විශේෂයෙන් ත්‍රිකෝණවල විවිධ ගුණ පිළිබඳ දැනුම, අනිවාර්ය වේ. ක්‍රි.පූ. 1650 දී පමණ කරවූ නිර්මාණයක් ලෙස සැලකෙන ''රයින්ඩ් පැපිරස්'' හි ද වැඩිපුර දක්නට ලැබෙන්නේ ත්‍රිකෝණ රූපයි.

මෙසේ හඳුනාගෙන තිබූ ජ්‍යාමිතික දැනුමෙන් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාදවල දිග අතර පවත්නා අපූරු සම්බන්ධතාවක් ක්‍රි.පූ. 6 වන සියවසේ දී පයිතගරස් නම් ග්‍රීක ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කරන ලදී. එම අවධියට පෙර සිටම චීනය, ඉන්දියාව වැනි පෙරදිග රටවල්වල පැවති වෙනත් ශිෂ්ඨාචාර අතර ද එම සම්බන්ධතාව දැන සිටි බවට සාක්ෂි ඇතත් මෙම සම්බන්ධතාව මුල්වරට ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්නට ඇත්තේ පයිතගරස් නම් ගණිතඥයා විසින් යැයි සැලකේ. පසු කාලීනව ක්‍රි.පූ. 3 සියවසේ දී යුක්ලිඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් මෙම ප්‍රතිඵලය සාධනයක් ද සහිතව ප්‍රමේයයක් වශයෙන් තමාගේ The Elements නම් ඓතිහාසික ග්‍රන්ථයට ඇතුළත් කළේ ය.

17.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයය



සමද්විපාද ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩැති එක ම හැඩයේ හා ප්‍රමාණයේ පිඟන් ගඩොල් අල්ලන ලද ගෙබිමක කොටසක් රූපයේ දැක්වේ. එහි PQR සමද්විපාද ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ කොටස පිළිබඳ ව සළකා බලමු. එහි PQ එක් පාදයක් වන සේ $PQAB$ සමචතුරස්‍රය ද, RQ එක් පාදයක් වන සේ $RCDQ$ සමචතුරස්‍රය ද (නිල් පාටින් දක්වා ඇති ප්‍රදේශ) ඇඳ ඇත. PQ පාදය මත ඇති සමචතුරස්‍රයට පිඟන් ගඩොල් දෙකකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් ද QR පාදය මත ඇති සමචතුරස්‍රයට ද පිඟන් ගඩොල් දෙකකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් ද අයත් වන අතර, PR කර්ණය මත ඇති $PREF$ සමචතුරස්‍රයට පිඟන් ගඩොල් හතරකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් අයත් වේ. ඒ අනුව PQR ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පාද තුන මත පිහිටි සමචතුරස්‍ර සඳහා

$PQAB$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $+$ $RCDQ$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $PREF$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය

යන සම්බන්ධතාව වලංගු බව පෙනේ.

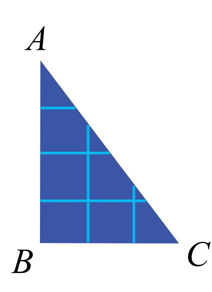
මෙම සම්බන්ධතාව පහත දැක්වෙන ක්‍රියාකාරකමෙන් තව දුරටත් තහවුරු කර ගනිමු.

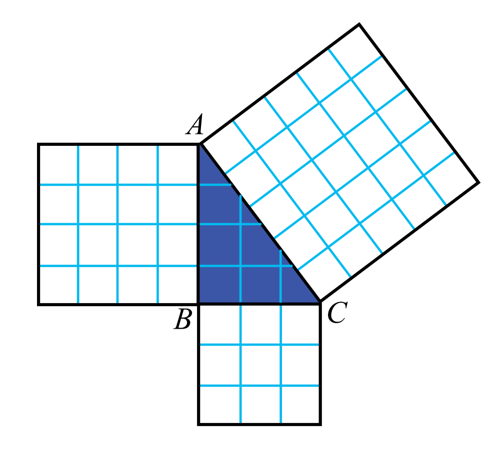
ක්‍රියාකාරකම

කොටුරුල් කඩදාසියකින් පහත දැක්වෙන ප්‍රමාණයේ සමචතුරස්‍ර හැඩ තුනක් හා ත්‍රිකෝණ හැඩයක් කපා ගන්න.

(i) පැත්තක් කොටු තුනක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(ii) පැත්තක් කොටු හතරක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(iii) පැත්තක් කොටු පහක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(iv) ඍජුකෝණය අඩංගු පාද කොටු 3ක් හා 4ක් වූ ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩයක්

සුදු කඩදාසියක, ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩය අලවා ගෙන, එහි එක් එක් පාද මත අනෙක් සමචතුරස්‍ර හැඩ රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට තබා අලවන්න.





ABC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය } = හතරැස් කොටු 16

BC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = හතරැස් කොටු 9

AC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = හතරැස් කොටු 25

ඒ අනුව ABC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ ඍජුකෝණය අඩංගු පාද වන AB හා BC පාද මත සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුව } = හතරැස් කොටු $16 + 9$

= හතරැස් කොටු 25

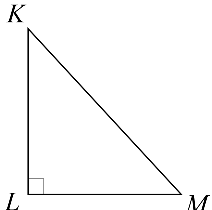
ABC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය වූ AC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය } = හතරැස් කොටු 25

එබැවින්, ABC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, ඍජුකෝණය අඩංගු පාද වන AB හා BC මත සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුව, කර්ණය වන AC මත පිහිටන සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.

ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ සම්බන්ධයෙන් බොහෝ ඈත අතීතයේ සිට ම දැන සිටි මෙම සම්බන්ධතාව, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත පරිදි ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය:
ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, ඍජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.

රූපයේ දැක්වෙන KLM සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය KM ද සෘජුකෝණය අඩංගු පාද KL හා LM ද වන විට,



KL පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= KL^2$

LM පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= LM^2$

KM කර්ණය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= KM^2$

එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව;

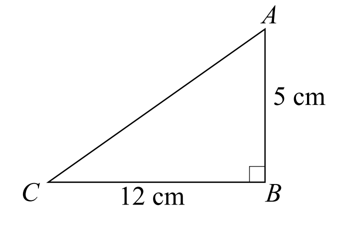
$$KL^2 + LM^2 = KM^2$$

තව ද ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක දිගෙහි වර්ගවල එකතුව අනෙක් පාදයේ දිගෙහි වර්ගයට සමාන වේ නම් එම ත්‍රිකෝණය සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වේ.
පයිතගරස් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදුකරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 90^\circ$ ද $AB = 5$ cm ද $BC = 12$ cm ද වේ. AC පාදයේ දිග ගණනය කරන්න.

පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

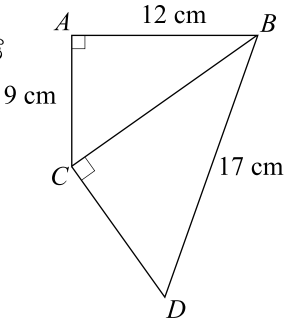


$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 5^2 + 12^2 \\
&= 25 + 144 \\
&= 169 \\
\therefore \quad AC &= \sqrt{169} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

$\therefore$ AC පාදයේ දිග 13 cm වේ.

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව CD දිග සොයන්න.



රූපයට අනුව, ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\
&= 12^2 + 9^2 \\
&= 144 + 81 \\
&= 225 \\
\therefore \quad BC &= \sqrt{225} \\
&= 15
\end{aligned}
$$

නැවතත් BCD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$CD^2 + BC^2 = BD^2$$
$$CD^2 + 15^2 = 17^2$$
$$CD^2 + 225 = 289$$
$$\therefore \quad CD^2 = 289 - 225$$
$$= 64$$
$$\therefore \quad CD = 8$$

$\therefore$ CD පාදයේ දිග 8 cm වේ.

දැන් ප්‍රායෝගික ගැටලු විසඳීම සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා ගන්නා අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 3

සිරස් විදුලි කණුවක මුදුනේ සිට 1 m පහළින් වූ මුදුවකට ගැට ගසා ඇති කම්බියක අනෙක් කෙළෙවර, කණුව පාමුල සිට 8 m ඈතින් සවිකර තිබූ තවත් මුදුවකට ගැට ගසා ඇත. මුදු දෙක අතර වූ කම්බියේ දිග 10 m නම්, කණුවේ උස සොයන්න (කම්බිය හොඳින් ඇදී ඇතැයි උපකල්පනය කරන්න).

දී ඇති තොරතුරු අනුව රූපය අඳිමු.

P
1 m
R
10 m
Q
8 m
S

PQ කණුව සිරස් නිසා, තිරස් පොළොව සමඟ සෘජුකෝණයක් සෑදේ. එනම්, $P\hat{Q}S = 90^\circ$ කි.

QRS සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් නිසා, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$QR^2 + QS^2 = RS^2$$
$$QR^2 + 8^2 = 10^2$$
$$QR^2 + 64 = 100$$
$$\therefore \quad QR^2 = 100 - 64$$
$$QR^2 = 36$$
$$\therefore \quad QR = 6$$
$$\therefore \text{ කණුවේ උස } = QR + PR$$
$$= 6 + 1$$
$$= 7$$

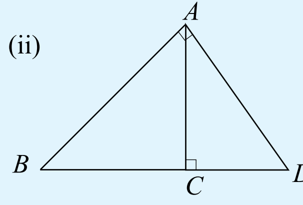
$\therefore$ කණුවේ උස 7 m වේ.

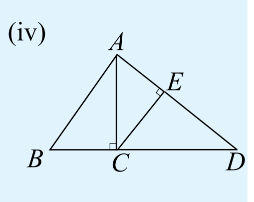
දැන් පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙමු.

17.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයට අදාළ හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

(i) (ii) (iii) (iv)





(i) $MO^2 = ... + ...$

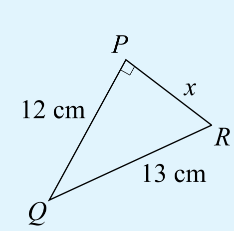
(ii) $BD^2 = ... + ...$
$.... = AC^2 + CD^2$
$AB^2 = AC^2 + ...$

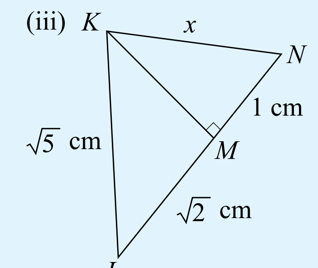
(iii) $PQ^2 = ... + ...$
$QR^2 = ... + ...$

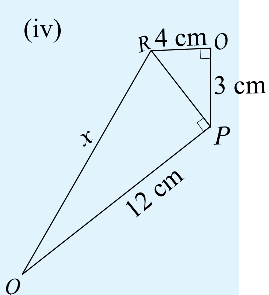
(iv) $AB^2 = ... + AC^2$
$.... = AE^2 + EC^2$
$AD^2 = AC^2 + ...$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ x මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

(i) (ii) (iii) (iv)







3. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය D වේ. ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග 2 cm නම් AD පාදයේ දිග සොයන්න (පිළිතුරු කරණි ආකාරයෙන් දක්වන්න).

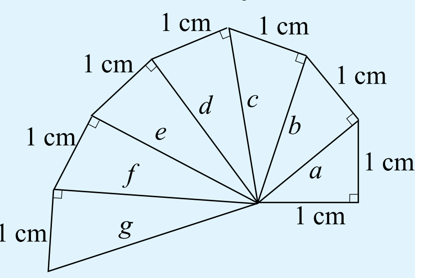
4. තිරස් පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක සිට උතුරට 15 m ගමන් කර එතැන් සිට නැගෙනහිර දිශාවට 8 m ගමන් කිරීමෙන් Q ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වේ.

(i) ඉහත තොරතුරු දළ රූප සටහනක දක්වන්න.

(ii) PQ දුර සොයන්න.

5. රොම්බසයක විකර්ණ දෙකෙහි දිග 12 cm හා 16 cm වේ. එහි පැත්තක දිග සොයන්න.

6. රූපයේ දැක්වෙන්නේ ආකිමිඩීස් සර්පිලය නමින් හැඳින්වෙන විශේෂ නිර්මාණයකි. එහි දී ඇති මිනුම් අනුව එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය ඇසුරෙන් a, b, c, d, e, f හා g වල අගයයන් සොයන්න (පිළිතුරු කරණි ආකාරයෙන් දක්වන්න).

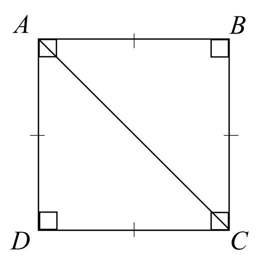


17.2 පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ භාවිත තවදුරටත්

පයිතගරස් ප්‍රමේයය සම්බන්ධ අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$ABCD$ සමචතුරස්‍රයකි. $AC^2 = 2AB^2$ බව සාධනය කරන්න.



සාධනය: $A\hat{B}C = 90^\circ$ නිසා

ABC යනු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි.

ABC ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$AC^2 = AB^2 + AB^2$ ($AB = BC$, සමචතුරස්‍රයේ පාද)

$$\therefore \quad \underline{\underline{AC^2 = 2AB^2}}$$

නිදසුන 2

$ABCD$ රොම්බසයේ AC හා BD විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. $AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය: $ABCD$ යනු රොම්බසයක් නිසා විකර්ණ සෘජුකෝණීව සමච්ඡේද වේ. (රූපය බලන්න.)

$\therefore \quad A\hat{O}B = 90^\circ$ ද $AO = OC$ ද $BO = OD$ ද වේ.

පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව; AOB සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ

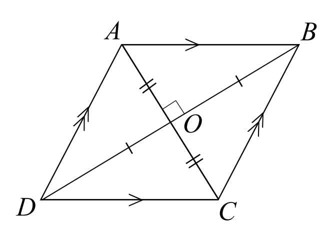
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) = AB^2$$

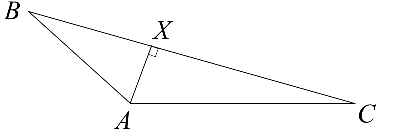
$$\therefore \quad \underline{\underline{AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2}}$$



නිදසුන 3

ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C$ මහා කෝණයක් වේ. A සිට BCට ලම්බව AX ඇඳ ඇත. $AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය:



AXB සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව

$AB^2 = AX^2 + BX^2$ —— ①

AXC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව

$AC^2 = AX^2 + CX^2$ —— ②

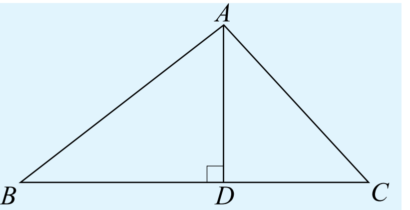
① − ② ; $AB^2 - AC^2 = AX^2 + BX^2 - (AX^2 + CX^2)$

$= AX^2 + BX^2 - AX^2 - CX^2$

$= \underline{\underline{BX^2 - CX^2}}$

ඉහත නිදසුන්වල දැක්වෙන ආකාරයට, පහත අභ්‍යාසයේ දැක්වෙන අනුමේයයන් සාධනය කරමු.

17.2 අභ්‍යාසය



1. ABC ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. (රූපය බලන්න) $AD = DC$ නම්, $AB^2 = BD^2 + DC^2$ බව සාධනය කරන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ බව සාධනය කරන්න.

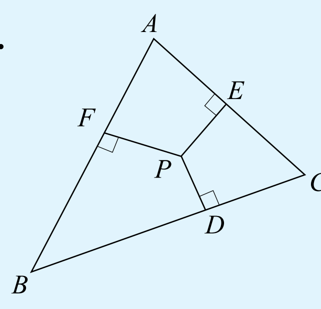
3. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. $4\,AD^2 = 3\,BC^2$ බව සාධනය කරන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ, AD උච්චයකි. $DC = CE$ වන සේ BC පාදය E තෙක් දික් කර ඇත. $AE^2 = 7\,EC^2$ බව සාධනය කරන්න.

5. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ විකර්ණ O හි දී සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වේ. $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ බව සාධනය කරන්න.

6. O යනු $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රය තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ බව සාධනය කරන්න. (ඉඟිය: $ABCD$ හි ඕනෑ ම පාදයකට සමාන්තරව O හරහා රේඛාවක් අඳින්න)

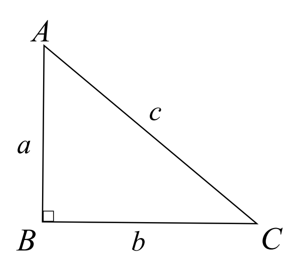
7.



ABC ත්‍රිකෝණය තුළ P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. P සිට BC, AC හා AB පාදවලට අඳින ලද ලම්බවල අඩි පිළිවෙළින් D, E හා F වේ.
(i) $BP^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$ බවත්
(ii) $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ බවත්
සාධනය කරන්න.

8. ABC සරල රේඛාවේ එකම පැත්තේ $ABXY$ හා $BCPQ$ සමචතුරස්‍ර දෙක පිහිටා ඇත. $PX^2 + CY^2 = 3\,(AB^2 + BC^2)$ බව සාධනය කරන්න.

17.3 පයිතගරස් ත්‍රිත්ව



රූපයේ දැක්වෙන ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාදවල දිග ඒකක a හා ඒකක b ද කර්ණයේ දිග ඒකක c ද වූ විට පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව $a^2 + b^2 = c^2$ වන බව අපි දනිමු. මේ ආකාරයට $a^2 + b^2 = c^2$ සමීකරණය තෘප්ත වන a, b හා c අගයයන් **පයිතගරස් ත්‍රිත්ව** ලෙස හැඳින්වේ.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ වන නිසා (3, 4, 5) පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. (3, 4, 5) යන ත්‍රිත්වයේ ඕනෑම ගුණාකාරයක් ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක් වේ.

උදා: (3, 4, 5) හි දෙකෙහි ගුණාකාර වන්නේ (6, 8, 10)

$6^2 + 8^2 = 10^2$ වන නිසා (6, 8, 10) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. (3, 4, 5) හි තුනෙහි ගුණාකාර වන්නේ (9, 12, 15). $9^2 + 12^2 = 15^2$. එබැවින් (9, 12, 15) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. මෙවැනි (3, 4, 5) හි ගුණාකාර හැර වෙනත් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ද පවතී.

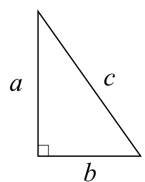
උදා: $5^2 + 12^2 = 13^2$ වන නිසා, (5, 12, 13) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.
$8^2 + 15^2 = 17^2$ වන නිසා, (8, 15, 17) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.

මෙවැනි ඕනෑ ම පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක ගුණාකාර ද පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ.
පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ලබා ගැනීම සඳහා යුක්ලීඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් "**පරාමිතික සමීකරණ**" හඳුන්වා දී ඇත. x හා y ලෙස වූ ඕනෑම සංඛ්‍යා දෙකක් $a = x^2 - y^2$ ද $b = 2\,xy$ ද $c = x^2 + y^2$ ද ලෙස ගත් විට a, b හා c සඳහා ලැබෙන්නේ පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.

උදා: $x = 6, y = 5,$ වූ විට $a = x^2 - y^2 = 6^2 - 5^2 = 11$

$b = 2xy = 2 \times 6 \times 5 = 60$

$c = x^2 + y^2 = 6^2 + 5^2 = 61$ ලැබේ.

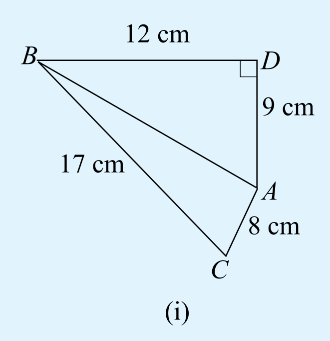


එවිට (11, 60, 61) පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.

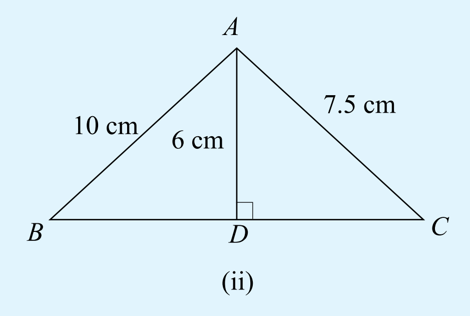
17.3 අභ්‍යාසය

1. (i) (8, 15, 17) (ii) (14, 18, 25) ලෙස දැක්වෙන්නේ ත්‍රිකෝණ දෙකක පාදවල මිනුම් නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙකෙන්, සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන්නේ කවර ත්‍රිකෝණය දැයි තෝරන්න. ඒ අනුව, "පයිතගරස් ත්‍රිත්වය" ලියා දක්වන්න.

2. (i) හා (ii) රූපවල දක්වා ඇති මිනුම් අනුව එක් එක් රූපයේ $B\hat{A}C$ සෘජුකෝණයක් බව පෙන්වන්න.



(i)



(ii)

3. පහත දැක්වෙන වගුව සම්පූර්ණ කරමින් "පයිතගරස් ත්‍රිත්ව"සොයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

x	y	x^2	y^2	a	b	c	පයිතගරස් ත්‍රිත්වය
				$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$	
2	1						
5	4						
4	3						
6	5						
7	5						

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට 9 cm දුරින් පිහිටි AB ජ්‍යායක දිග 24 cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.

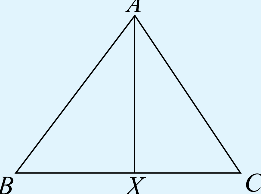
2. $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm හා $\hat{B}$ සෘජුකෝණයක් වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. ඔබ අඳින ලද ත්‍රිකෝණය අදාළ කර ගනිමින් $\sqrt{13}$ හි අගය පළමු දශමස්ථානයට සොයන්න.

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් දිග සහිත රේඛා ඛණ්ඩ නිර්මාණය කරන්න.

(i) $\sqrt{8}$ cm (ii) $\sqrt{10}$ cm (iii) $\sqrt{41}$ cm

4. ABC යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ද වේ. $16\ AE^2 = 7AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

5. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ සුළු කෝණයකි. A සිට BCට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය X වේ. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BX$ බව සාධනය කරන්න.



18 ත්‍රිකෝණමිතිය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

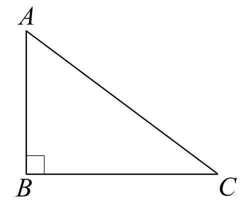
- ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වන සයිනය, කෝසයිනය හා ටැංජනය හඳුනා ගැනීමට
- සයින්, කෝසයින් හා ටැංජන් වගු භාවිත කර ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් සිදු කිරීමට
- ත්‍රිකෝණමිතික ගැටලුවල විසඳුම් පරීක්ෂා කිරීම සඳහා විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රය යොදා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

18.1 සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක දිග දුන් විට, ඉතිරි පාදයේ දිග සොයා ගැනීමට පයිතගරස් සම්බන්ධය යොදා ගත හැකි බව අපි දනිමු.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක දිග හා සෘජුකෝණය හැර වෙනත් කෝණයක විශාලත්වය දී ඇති විට, ත්‍රිකෝණයේ ඉතිරි පාදවල දිග ලබා ගැනීමට පයිතගරස් සම්බන්ධයෙන් නොහැකි ය. ඒ සඳහා ක්‍රමයක් හඳුනා ගැනීම පිණිස, මුලින් ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද නම් කරන ආකාරය හඳුනා ගනිමු.



ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ සෘජුකෝණයකි. එවිට, $\hat{A}$ හා $\hat{C}$ සුළු කෝණ දෙකක් වේ. සෘජුකෝණය වන $\hat{B}$ට ඉදිරියෙන් ඇති AC පාදය කර්ණය ලෙස හැඳින්වේ. ත්‍රිකෝණයේ අනික් කෝණ දෙකෙන් එකක් වන $\hat{C}$ ගත්විට, ඊට ඉදිරියෙන් පිහිටි AB පාදය, $\hat{C}$ හි සම්මුඛ පාදය ලෙස හැඳින්වේ. තවද $\hat{C}$ හි බාහු දෙකෙන් එකක් වූ ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නොවන පාදය වන BC පාදය, $\hat{C}$ හි බද්ධ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.

ඒ අනුව, $\hat{A}$ සැලකූ විට පෙර පරිදි ම, ඊට ඉදිරියෙන් පිහිටි BC පාදය $\hat{A}$ හි සම්මුඛ පාදයත්, ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නොවන, $\hat{A}$ හි බාහුවක් වන AB පාදය $\hat{A}$ හි බද්ධ පාදයත් වේ.

මේ අනුව රූපයේ දැක්වෙන PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ,

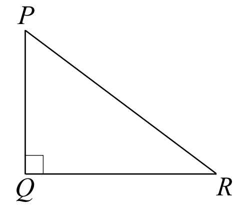
කර්ණය $= PR$

$Q\hat{R}P$ සැලකූ විට, සම්මුඛ පාදය $= PQ$

බද්ධ පාදය $= QR$

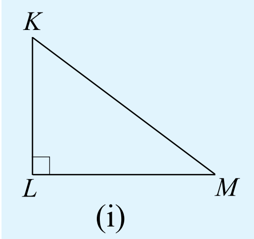
$Q\hat{P}R$ සැලකූ විට සම්මුඛ පාදය $= QR$

බද්ධ පාදය $= PQ$.

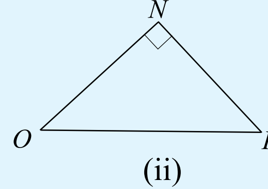


18.1 අභ්‍යාසය

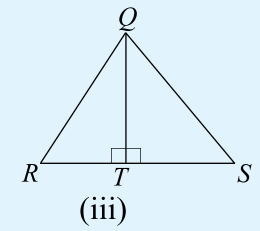
1. පහත දැක්වෙන රූප ඇසුරෙන් දී ඇති වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.



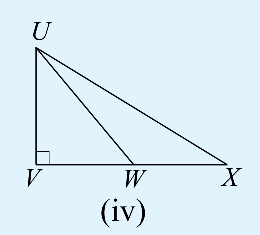
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

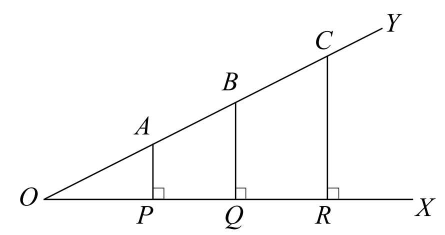
	සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය	සළකා බලන කෝණය	සම්මුඛ පාදය	බද්ධ පාදය
(i)	KLM	KM	$L\hat{K}M$ $L\hat{M}K$		
(ii)	PNO		$N\hat{O}P$ $O\hat{P}N$		
(iii)	QRT QTS		$R\hat{Q}T$ $T\hat{Q}S$		
(iv)	UVX UVW		$V\hat{U}X$ $U\hat{W}V$		

18.2 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කෝණයක් ඇසුරෙන් පාද දෙකක් අතර සම්බන්ධතා පිළිබඳ ව විමසා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි නිරතවන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- XO හා OY බාහු 11 cm පමණ වන සේ 30° ක් වූ $X\hat{O}Y$ අඳින්න.
- OY පාදය ඔස්සේ O සිට 2 cm, 4 cm, 7 cm දුරින් පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල සිට, OX රේඛාවට ලම්බ රේඛා ඇඳ ඒවා OX රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q හා R ලෙස නම් කරන්න.
- එවිට, පහත ආකාරයේ රූපයක් ඔබට ලැබෙනු ඇත.



- එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ පාද මැන පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න. (සියලු මිනුම් හා ගණනය කිරීම් පළමු දශම ස්ථානයට ගන්න)

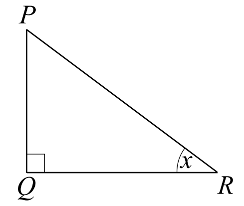
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය (cm)	30° කෝණය අනුව සම්මුඛ පාදය (cm)	30° කෝණයට අනුව බද්ධ පාදය (cm)	$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$
AOP	2	1	1.7	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1.7}{2} = 0.9$	$\frac{1}{1.7} = 0.6$
BOQ						
COR						

ක්‍රියාකාරකමෙන් ලබාගත් මිනුම් මත සකස් කළ වගුව අනුව, 30° කෝණය සඳහා සෑම ත්‍රිකෝණයකින්ම $\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ සඳහා 0.5 ක් ද

$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$ සඳහා 0.6 ක් ද

$\dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ සඳහා 0.9 ක් ද ලෙස ලැබී ඇත.

මෙසේ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල එක් එක් පාද අතර අනුපාතවල නියත අගයක් ලැබීමට හේතුව ඒවා සමකෝණික වීම බව ඔබට නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය. මෙම අනුපාත සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලෙස හැඳින්වේ. මෙම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත, ඊට සම්බන්ධ වන පාද අනුව, 30° කෝණය සඳහා සයිනය, 30° කෝණය සඳහා ටැංජනය හා 30° කෝණය සඳහා කෝසයිනය ලෙස නම් කරනු ලැබේ. සයිනය දැක්වීම සඳහා "sin" ද, ටැංජනය දැක්වීම සඳහා "tan" ද, කෝසයිනය දැක්වීම සඳහා "cos" ද යොදනු ලැබේ. ඒ අනුව 30° කෝණයේ සයිනය, "$\sin 30^\circ$" ද, 30°කෝණයේ කෝසයිනය "$\cos 30^\circ$" ද 30° කෝණයේ ටැංජනය "$\tan 30^\circ$" ද වේ.



දැන් රූපයේ දැක්වෙන PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඉහත දැක්වූ සංකේත ඇසුරෙන් ලියා දක්වමු.

x ඇසුරෙන්;

$$\sin x = \frac{x \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\cos x = \frac{x \text{ හි බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\tan x = \frac{x \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{x \text{ හි බද්ධ පාදය}} = \frac{PQ}{QR}$$

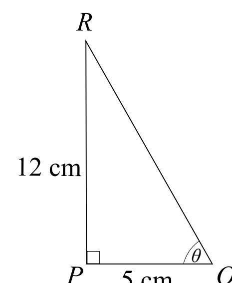
මෙම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන යොදා ගනිමින් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ $\hat{P}$ සෘජුකෝණයකි. $PQ = 5$ cm ද, $PR = 12$ cm ද වේ. $P\hat{Q}R = \theta$ ලෙස දැක්වේ.

(i) QR පාදයේ දිග සොයන්න.
(ii) පහත දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.

(a) $\sin\theta$ **(b)** $\cos\theta$ **(c)** $\tan\theta$



(i) පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$
$$= 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144$$
$$\therefore \quad QR = \sqrt{169}$$
$$= 13$$

$\therefore$ QR පාදයේ දිග 13 cm වේ.

(ii) **(a)** $\sin\theta = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{12}{13} = \underline{\underline{0.9230}}$

(b) $\cos\theta = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{5}{13} = \underline{\underline{0.3846}}$

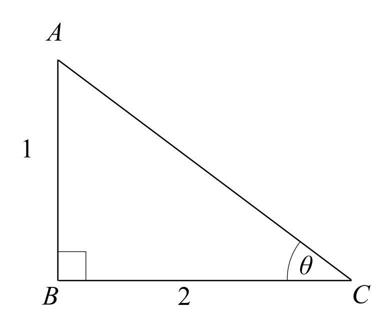
(c) $\tan\theta = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{12}{5} = \underline{\underline{2.4}}$

නිදසුන 2

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ නම්, $\sin\theta$ හා $\cos\theta$ හි අගය සොයන්න.

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ නම් θ හි සම්මුඛ පාදය ඒකක 1ක් ද, θ හි බද්ධ පාදය ඒකක 2ක් ද වේ.

මෙම තොරතුරු රූපයකින් දක්වමු.



එවිට පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව ABC ත්‍රිකෝණයේ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 1^2 + 2^2$$
$$= 5$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{5}$$

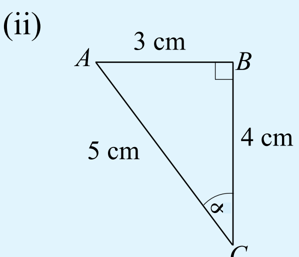
එවිට, $\sin\theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ $\qquad$ $\text{Cos}\,\theta = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$

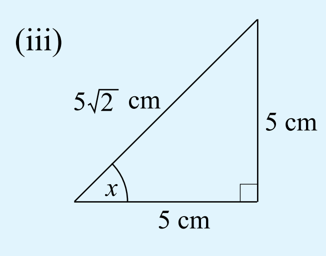
$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

18.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූප සටහනේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන්, එම රූපය යටින් දී ඇති හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

(i) $\qquad$ (ii) $\qquad$ (iii)





$\sin\theta =$ .... $\qquad$ $\sin\alpha =$ .... $\qquad$ $\sin x =$ ....

$\cos\theta =$ .... $\qquad$ $\cos\alpha =$ .... $\qquad$ $\cos x =$ ....

$\tan\theta =$ .... $\qquad$ $\tan\alpha =$ .... $\qquad$ $\tan x =$ ....

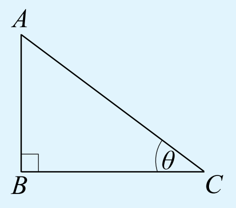
2. $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ නම් $\quad$ (i) $\tan\theta$ $\quad$ (ii) $\cos\theta$ සොයන්න.

3. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ ඍජුකෝණයකි. $\hat{C} = \theta$ ලෙස දැක්වූ විට,

(i) $B\hat{A}C$, θ ඇසුරෙන් දක්වන්න.

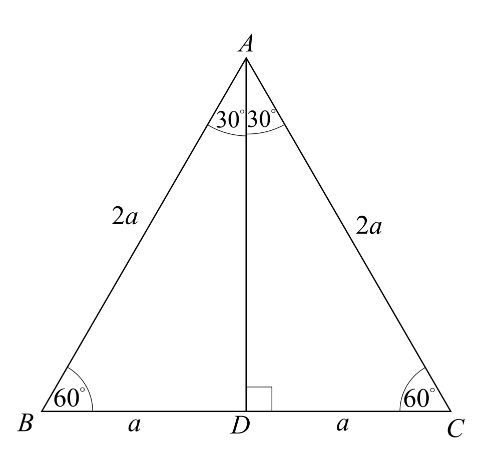
(ii) $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ බව පෙන්වන්න.



18.3 විශාලත්ව 30°, 45° හා 60° වන කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

පාදවල දිග $2a$ බැගින් වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සැලකීමෙන් 60° හා 30° කෝණ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගත හැකි ය.



රූපයේ දැක්වෙන්නේ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. එහි, ශීර්ෂ කෝණ 60° බැගින් වේ. A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට AD ලම්බකය ඇඳි විට BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වන බව ද $B\hat{A}C$ කෝණය සමච්ඡේද වන බව ද අපි දනිමු. එවිට $B\hat{A}D = 30^\circ$ ක් වේ.

ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ AD පාදයේ දිග a ඇසුරෙන් සොයමු. පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව,

$$\begin{aligned} BD^2 + AD^2 &= AB^2 \\ a^2 + AD^2 &= (2a)^2 \\ AD^2 &= 4a^2 - a^2 \\ &= 3a^2 \\ AD &= \sqrt{3}a \end{aligned}$$

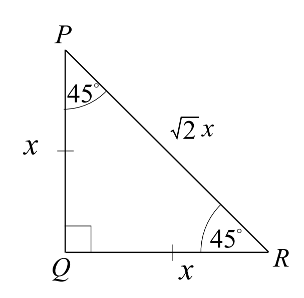
දැන් ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

මෙවැනිම ආකාරයකින් 45° කෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගැනීමට, PQR සෘජුකෝණික සමද්විපාද ත්‍රිකෝණය යොදා ගනිමු. එහි සෘජුකෝණය අඩංගු පාදවල දිග x ලෙස ගත් විට,



පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව, $PR^2 = x^2 + x^2$

$= 2x^2$

$\therefore \quad PR = \sqrt{2}x$

ඒ අනුව $\sin 45^\circ = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{x}{\sqrt{2}x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{x}{\sqrt{2}x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

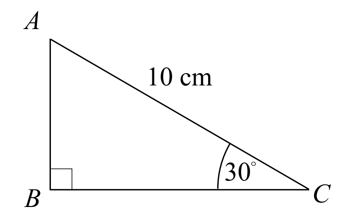
$\tan 45^\circ = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{x}{x} = 1$

30° , 45° , 60° කෝණ සඳහා ලබා ගත් අනුපාත, පහත වගුවේ දැක්වේ.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

නිදසුන 1

ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $\hat{B}$ සෘජුකෝණයක් ද, $A\hat{C}B = 30^\circ$ ක් ද, AC පාදය 10 cm ද වේ. AB හා BC පාදවල දිග සොයන්න.



රූපය අනුව, $\sin 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{10}$

$AB = 5$

$\therefore$ AB පාදයේ දිග 5 cm වේ.

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$$

$$\therefore \quad BC = 5\sqrt{3}$$

$\therefore$ BC පාදයේ දිග $5\sqrt{3}$ cm වේ.

නිදසුන 2

PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග සොයන්න.

$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PR}$$

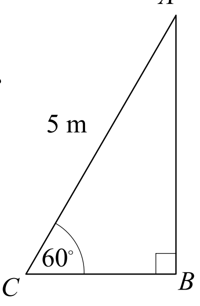
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{PR}$$

$$\therefore \quad PR = 5\sqrt{2}$$

$\therefore$ කර්ණයේ දිග $5\sqrt{2}$ cm වේ.

නිදසුන 3

දිග 5 m වන ඉණිමගක් සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇත්තේ, තිරස හා ඉණිමග අතර කෝණය 60° ක් වන සේය. ඉණිමගේ ඉහළ කෙළෙවර බිත්තිය ස්පර්ශ කරන්නේ තිරස් බිමේ සිට කොපමණ උසකින් ද?



සිරස් බිත්තිය හා තිරස් පොළොව අතර කෝණය 90° ක් නිසා රූපයේ $A\hat{B}C = 90^\circ$ක් වේ.

ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ,

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{5}$$

$$\therefore AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$= 4.325$ ($\sqrt{3} = 1.73$ ලෙස ගැනීමෙන්)

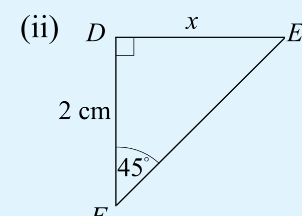
$\therefore$ ඉණිමගේ ඉහළ කෙළවර බිත්තිය ස්පර්ශ කරන්නේ තිරස් බිමේ සිට 4.33 m උසිනි.

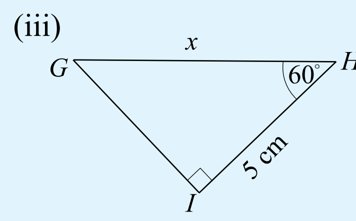
දැන් ඉහත වගුවේ අගය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

18.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණවල දී ඇති දත්ත අනුව, x මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

(i) A, x, 2 cm, 30°, B, C

(ii)


(iii)


2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය, ඉහත වගුවේ සඳහන් අනුපාත යොදා ගනිමින් සොයන්න.

a. $\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ}$ **c.** $\sin 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} + \tan 60^{\circ}$

b. $\sin 45^{\circ} + \cos 45^{\circ} + \tan 60^{\circ}$ **d.** $\cos 60^{\circ} + \sin 30^{\circ} + \tan 60^{\circ}$

3. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) $\sin 30^{\circ}\ \cos 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} \sin 60^{\circ} = 1$

(ii) $\cos 30^{\circ}\ \cos 60^{\circ} - \sin 60^{\circ}\ \sin 30^{\circ} = 0$

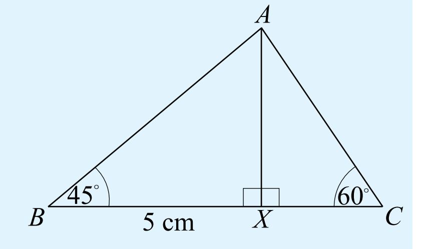
(iii) $\tan 30^{\circ} = \dfrac{\tan 60^{\circ} - \tan 30^{\circ}}{1 + \tan 60^{\circ} \tan 30^{\circ}}$

4. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,

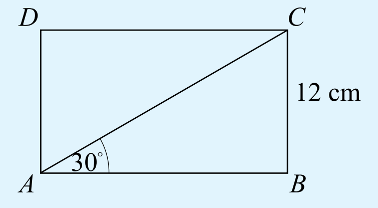
(i) AX දිග

(ii) AC පාදයේ දිග

සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න)



5. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ BC පාදය 12 cm වේ නම් විකර්ණයේ දිග සොයන්න.



6. ඇන්ටෙනා කණුවක් සිරස් ව තබා ගැනීම සඳහා එහි මුදුනේ සිට 50 cm ක් පහළින් ගැට ගසන ලද කම්බියක අනික් කෙළවර කණුව පාමුල සිට 5 m ඈතින් තිරස් පොළොවේ පිහිටි කුඤ්ඤයකට තදින් ඇදෙන සේ ගැට ගසා ඇත. කම්බිය හා තිරස් පොළොව අතර කෝණය 30° වේ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.

(ii) $\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගෙන කණුවේ උස සොයන්න.

18.4 ත්‍රිකෝණමිතික වගුව

මෙතෙක් සලකා බලන ලද්දේ 30°, 45° හා 60° කෝණ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත පමණි. එහෙත් $0^{\circ} - 90^{\circ}$ තෙක් වූ අනෙක් කෝණ සඳහා ද මෙවැනි අනුපාත තිබේ. එම කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වගු ගත කර ඇත. සයින, කෝසයින හා ටැංජන සඳහා වගු තුනක් වෙන වෙන ම සකසා ඇත. වගුවට ඇතුළත් කරන්නේ කෝණ නිසා කෝණයක මිනුම වන අංශකය "කලා" නැමැති තවත් කුඩා කොටස්වලට බෙදා තිබේ. එක් අංශකයක් කලා 60කට සමාන වේ. එනම් $1^{\circ} = 60'$.

සයින, කෝසයින හා ටැංජන යන ඕනෑම වගුවක පළමුවන තීරුවේ 0° සිට 90° තෙක් වූ කෝණ අගය දැක්වේ. පහත දැක්වෙන්නේ ටැංජන වගුවක කොටසකි.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·0000	0·0029	0·0058	0·0087	0·0116	0·0145	0·0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	·0175	·0204	·0233	·0262	·0291	·0320	·0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	·0349	·0378	·0407	·0437	·0466	·0495	·0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	·0524	·0553	·0582	·0612	·0641	·0670	·0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	·0699	·0729	·0758	·0787	·0816	·0846	·0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26

ඉහළ මුල් තීරයේ අංශක ගණන 0° සිට 90° දක්වා දැක්වෙන අතර (මෙහි දැක්වෙන්නේ වගුවේ කොටසක් නිසා අංශක 0° සිට 4° දක්වා පමණක් දැක්වේ) පළමු පේළියේ, $0'$, $10'$, $20'$ ආදි ලෙසත්, මධ්‍යනය අන්තර $1'$, $2'$, ...$9'$ ආදි ලෙසත් වශයෙන් එක් අංශයක කොටස් වූ කලා අගයන් දක්වා ඇත. කිසියම් කෝණයක් සඳහා අනුපාතය ලබා ගැනීම සඳහා ලඝුගණක වගුවේ ආකාරයටම පේළි අංකය හා තීර අංකය ඔස්සේ වූ අගය හා මධ්‍යන්‍ය අන්තර තීරුවේ අගය සම්බන්ධ කර ගනු ලැබේ.

දැන්, ඉහත සඳහන් කළ ත්‍රිකෝණමිතික වගු වෙන වෙන ම සලකා බලමු.

ටැංජන වගුව

මෙම වගුවේ අනුපාත 0.0000න් ආරම්භ වී ක්‍රමයෙන් වැඩිවෙමින් 1.0000ත් ඉක්මවා යමින් අංශක 90° තෙක් පැමිණීමේ දී ඉතා විශාල අගයන් ගනියි. පහත දැක්වෙන ටැංජන වගුවෙන් ලබාගත් තවත් කොටසකි.

මුලින් ම tan 43° හි අගය සොයමු. tan 43° ට අදාල අගය ලබා ගැනීමට 43° අඩංගු පේළිය ඔස්සේ 0′ තීරයේ ඇති අගය ගන්න. එය 0.9325 වේ.
∴ tan 43° = 0.9325 වේ.

දැන් වගුව භාවිතයෙන් tan 48° 20′ හි අගය සොයමු.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
45	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40	7	14	21	28	34	41	48	55	62

වගුව භාවිතයෙන් ඒ සඳහා 48° අඩංගු පේළිය ඔස්සේ 20′ ඇති තීරය දක්වා යා යුතු ය. එහි ඇති .1237 ගන්න. තව ද එම 20′ අඩංගු තීරයේ ඉහළින් ඇති සංඛ්‍යාව වන 1.0117 හි පූර්ණ කොටස ලෙස 1 ඇති නිසා එම තීරයේ සියලු සංඛ්‍යා සඳහා එම පූර්ණ කොටස ගත යුතු ය. (එසේ මුල් පේළියේ පමණක් පූර්ණ කොටස යොදන්නේ වගුවේ පැහැදිලි බව සඳහා ය.) ඒ අනුව tan 48° 20′ හි අගය 1. 1237 වේ.

ඒ ආකාරයටම tan 49° 57′ හි අගය සොයමු. මුලින් ම 49° 50′ හි ටැංජන අගය සෙවිය යුතු ය.
එය,

tan 49° 50′ = 1.1847 ලෙස ලැබේ.

57′ වීමට මධ්‍ය අන්තර කොටසින් 7′ ද ගත යුතු ය. ඒ අනුව 7′ ට අදාළ මධ්‍යන්‍ය අන්තරය වන 0.0048 (සම්මතයක් ලෙස මෙහි දී මධ්‍යන්‍ය අන්තරය දශමස්ථාන 4ක අගයක් ලෙස සලකා එහි නිෂ්ශුන්‍ය කොටස පමණක් දක්වනු ලැබේ) යන අගය 1.1847 ට එකතු කළ යුතු ය. එවිට,

tan 49° 57′ = 1.1847 + 0.0048
= 1.1895 ලෙස ලැබේ.

නිදසුන 1

(i) tan 34° 30′ = 0.6873

(ii) tan 44° 42′ = 0.9884 + 0.0011
= 0.9895

(iii) tan 79° 25′ = 5.309 + 0.044
= 5.353

ලඝුගණක වගුවේ ප්‍රතිලඝුගණකය ලබා ගන්නා ආකාරයටම කිසියම් කෝණයක් සඳහා වූ අනුපාතයකින් අනුරූප කෝණය ලබා ගැනීම ද සිදු කෙරේ.

$\tan\theta = 1.1054$ පරිදි වන θ කෝණය ලබා ගනිමු.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·0000	1·0058	1·0117	1·0176	1·0235	1·0295	1·0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	·0355	·0416	·0477	·0538	·0599	·0661	·0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	·0724	·0786	·0850	·0913	·0977	·1041	·1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	·1106	·1171	·1237	·1303	·1369	·1436	·1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	·1504	·1571	·1640	·1708	·1778	·1847	·1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62

1.1054ට ආසන්න ම ඊට අඩු අගය වන 1.1041 වගුවෙන් ලබා ගන්න. ඊට අනුරූප කෝණය $47^\circ\ 50'$ බව පෙනේ. 1.1054 ලැබීමට 1.1041ට තවත් 0.0013ක් එකතු විය යුතු ය. එමනිසා 0.0013 (එනම්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටසේ 13 ලෙස ඇති අගයට) අනුරූප කලා ගණන මෙම අංශක ගණනට එකතු කළ යුතු ය. එම අගය කලා 2කි. එමනිසා, ටැංජනය 1.1054 වන කෝණය වන්නේ $47^\circ\ 50' + 2' = 47^\circ\ 52'$ එමනිසා, $\theta = 47^\circ\ 52'$.

නිදසුන 2

(i) $\tan\theta = 0.3706$ නම්

$\theta = 20^\circ\ 20'$

(ii) $\tan\theta = 0.4774$ නම්

$\theta = 25^\circ\ 30' + 1'$

$= 25^\circ\ 31'$

(iii) $\tan\theta = 0.8446$ නම්

$\theta = 40^\circ\ 11'$

සයින වගුව

මෙම වගුවෙහි 0.0000 සිට 1.0000 තෙක් අගයන් පවතී. ටැංජන් වගුවේ මෙන්ම, මෙහි දී ද පළමුවන තීරයෙහි කෝණයේ අගය 0° සිට 90° තෙක් ලබා දේ. ඉහළින් පවතින මුල් පේළියෙහි $0'$, $10'$, $20'$ ආදි ලෙසත්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටසේ, නැවත $1'$, $2'$, $3'$ ආදි ලෙසත් කෝණයේ කලා අගයන් දැක්වේ. ටැංජන් වගුව භාවිත කළ ආකාරයට ම මෙම වගුව ද භාවිත කරනු ලැබේ.

සටහන: ටැංජන වගුවේ අගයන් 0 සිට ඉතා විශාල අගයන් දක්වා විහිදුන ද සයින වගුවේ ඇත්තේ 0 සිට 1 දක්වා අගයන් පමණි. එයට හේතුව ත්‍රිකෝණයක කෝණයක සයින අගය සැමවිටම 0 ත් 1ත් අතර පිහිටන නිසා ය.

sin 33° 27′ හි අගය වගුවෙන් ලබා ගනිමු.

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
30°	0·5000	0·5025	0·5050	0·5075	0·5100	0·5125	0·5150	59	1	5	8	10	13	15	18	20	23
31	·5150	·5175	·5200	·5225	·5250	·5275	·5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	·5299	·5324	·5348	·5373	·5398	·5422	·5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	·5446	·5471	·5495	·5519	·5544	·5568	·5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	·5592	·5616	·5640	·5664	·5688	·5712	·5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22

මුලින් ම, sin 33° 20′ = 0.5495 ලෙස සටහන් කරගෙන, ඉතිරි 7′ ලබා ගැනීම සඳහා 33°පේළියේම මධ්‍යන්‍ය අන්තරවල 7′ට අනුරූප අගය වන 0.0017 එයට එකතු කරන්න. එවිට, sin 33°27′ = 0.5495 + 0.0017 = 0.5512 වේ.

නිදසුන 3

(i) sin 75° 44′ = 0.9689 + 0.0003
= 0.9692

(ii) sin 45° 34′ = 0.7133 + 0.0008
= 0.7141

(iii) sin 39° 50′ = 0.6406

දැන්, යම් සයින අගයක් සඳහා ගැලපෙන කෝණය ලබා ගැනීමට වගුව යොදා ගනිමු. එය ද ටැංජන වගුව යොදා ගත් ආකාරයට ම වේ.

sin θ = 0.5075 වන θ කෝණය මුලින් ම සොයමු. මෙම අගය වගුවේ 30° පේළියේ 30′ තීරුවේ ඇත.
ඒ අනුව sin θ = 30° 30′ වේ.

දැන් තවත් කෝණයක අගය වගුව ඇසුරෙන් සොයමු.

sin θ = 0.5277 වන θ කෝණය සෙවීමට, 0.5277 නොමැති බැවින් ඊට ආසන්නම කුඩා අගය ලෙස වගුවේ ඇති 0.5275 සලකන්න. එයට අනුරූප කෝණය වන්නේ 31° 50′ ය. ඉතිරි 0.0002ට අනුරූප වන කලා අගය සෙවීමට එම පේළියේ ම ඇති මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටස දෙස බලන්න. එහි 2 යන අගයට අනුරූප වන්නේ කලා 1 කි. එමනිසා, සයින අගය 0.5277 නම් වන කෝණය වන්නේ 31° 51′ ය.
එනම් sin θ = 0.5277 නම් θ = 31° 51′ වේ.

නිදසුන 4

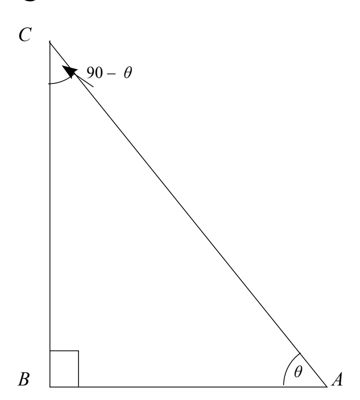
(i) sin θ = 0.5831 නම්
θ = 35° 40′

(ii) sin θ = 0.7036 නම්
θ = 44° 43′

(iii) sin θ = 0.9691 නම්
θ = 75° 43′

කෝසයින

පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණය සලකන්න.



එය, $A\hat{B}C = 90^\circ$ වන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි. මෙම ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C = \theta$ ලෙස ගනිමු. එවිට, ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල එකතුව 180° නිසා $A\hat{C}B = 90^\circ - \theta$ වේ.

$A\hat{C}B$ හා $B\hat{A}C$ කෝණවල එකතුව අංශක 90° කි. එවැනි කෝණ යුගලක් අනුපූරක කෝණ යුගලක් ලෙස හැඳින්වූ බව ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී උගෙන ඇත.

මෙම ABC ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\cos\theta = \frac{\hat{A} \text{ හි බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{AB}{AC} \text{ වේ.}$$

එසේ ම,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{\hat{C} \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{AB}{AC} \text{ වේ.}$$

මේ අනුව, $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ ලෙස අපට ලැබේ.

මෙම සම්බන්ධය භාවිතයෙන්, ත්‍රිකෝණයක කෝණයක කෝසයිනය, සයින ඇසුරෙන් ගණනය කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

$\cos 58^\circ$ හි අගය සොයන්න.

$\cos 58^\circ = \sin(90^\circ - 58^\circ)$ (ඉහත ලබාගත් සම්බන්ධය අනුව)

$= \sin 32^\circ$

$= \underline{\underline{0.5299}}$ (ඉහත කොටසේ දී ඇති වගුව අනුව)

නිදසුන 2

cos $56^{\circ}\ 18'$ හි අගය සොයන්න.

මුලින් ම $90 - 56^{\circ}\ 18'$ හි අගය සොයමු. එය $33^{\circ}\ 42'$ කි. එමනිසා,

$$\begin{aligned} \cos 56^{\circ}\ 18' &= \sin(90^{\circ} - 56^{\circ}\ 18') \\ &= \sin 33^{\circ}\ 42' \\ &= \underline{\underline{0.5549}} \end{aligned}$$

මේ අයුරින් ම, කෝසයිනය දී ඇති විට අදාළ කෝණය ද සෙවිය හැකි ය. ඒ සඳහා නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 3

$\cos\theta = 0.5175$ නම් θ හි අගය සොයන්න.

මෙය, $\sin(90 - \theta) = 0.5175$ ලෙස ලියමු. ඉන්පසු, සයින අගය 0.5175 වන කෝණය සොයමු. වගුව අනුව එය $31^{\circ}\ 10'$ වේ. එමනිසා,

$90 - \theta = 31^{\circ}\ 10'$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මෙම සමීකරණය θ සඳහා විසඳීමෙන් θ හි අගය සෙවිය හැකි ය. එවිට,

$$\theta = 90 - 31^{\circ}\ 10' = 58^{\circ}\ 50' \text{ ලෙස } \theta \text{ හි අගය ලැබේ.}$$

සටහන: ත්‍රිකෝණයක කෝණයක කෝසයිනය ද සැමවිටම, සයිනය මෙන්, 0ත් 1ත් අතර අගයක් වේ. ඉහත නිදසුන්වල දැක්වූ ආකාරයට (සයින ඇසුරෙන් කෝසයින ලබා ගැනීමට) අමතර ව, සයින වගුව ඇසුරෙන් ද කෝණයක කෝසයිනය සෙවිය හැකි ය. සයින වගුවේ, මධ්‍යන්‍ය අන්තරවලට කලින් තීරයේ දැක්වෙන්නේ වගුවේ මුල් ම තීරයේ ඇති කෝණ අංශක 90න් අඩුකර ලැබෙන කෝණ බව නිරීක්ෂණය කරන්න. එම අගයන් භාවිතයෙන් ද වගුව ඇසුරෙන් කෝසයින සෙවිය හැකි ය. නමුත්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර ගණනය කිරීමේ දී අදාළ අගයන් අඩු කළ යුතු ය.

කෝසයින වගුව භාවිතයෙන් කෝණ සොයා ගන්නා අයුරු දැන් විමසා බලමු.

වගුව ඇසුරෙන් cos $4^{\circ}\ 20'$ හි අගය සොයමු.

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	(අන්තරය ඉතා කුඩා බැවින් වගු ගත කිරීම අනවශ්‍යය.)								
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9[illegible]7	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

නිදසුන 4

දකුණු පස "අංශක" තීරුවෙන් 4° හා පහළ කලා තීරුවෙන් $20'$ ගත යුතු ය. 4° කෝණයට අදාළ පේළියේ ඊට වම් පසින් වූ $20'$ ගත්විට $\cos 4^\circ\ 20' = 0.9971$ වේ.

නිදසුන 5

දැන් $\cos 9^\circ\ 26'$ හි අගය සොයමු.

එවිට $\cos 9^\circ\ 20' = 0.9868$ එම පේළියේ ම මධ්‍යන්‍ය අන්තර තීරුවල $6'$ ට අනුරූප අගය 0.0003 වේ.

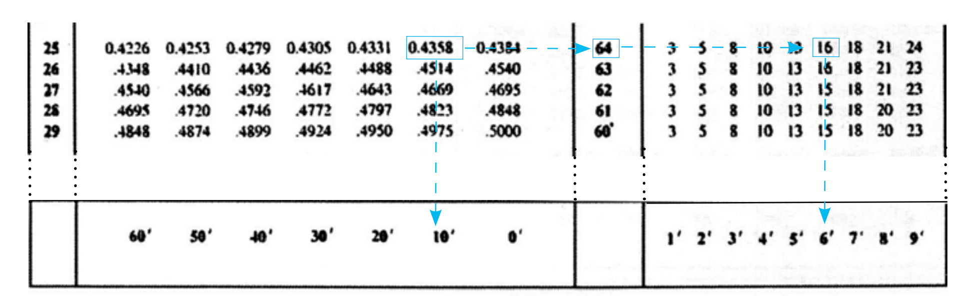
දැන් කෝසයින් අගය ලබා ගැනීමේ දී මධ්‍ය අන්තර තීරුවල අගය අඩු කළ යුතු ය.

ඒ අනුව

$$\cos 9^\circ\ 26' = 0.9868 - 0.0003$$
$$= \underline{\underline{0.9865}}$$

නිදසුන 6

$\cos\theta = 0.4374$ වූ කෝණය සොයමු.



25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	[illegible]	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
⋮								⋮									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

වගුවේ 0.4374 ට අඩු ආසන්න අගය 0.4358 වේ. එය $64^\circ\ 10'$ වේ.

0.4374 වීමට අඩු 0.0016 පිහිටන්නේ මධ්‍යයන්‍ය අන්තර $6'$ හි ය. එම කලා ගණන අඩු කළ විට,

$$64^\circ\ 10' - 6' = 64^\circ\ 4'$$
$$\therefore\ \cos\theta = 0.4374 \text{ වන } \theta \text{ කෝණය } = \underline{\underline{64^\circ\ 4'}}$$

18.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය ටැංජන වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.

a. $\tan 25^{\circ}$ **b.** $\tan 37^{\circ}$ **c.** $\tan 40^{\circ}\ 54'$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ටැංජන අගයට අදාළ θ කෝණය සොයන්න.

a. $\tan \theta = 0.3214$ **b.** $\tan \theta = 0.7513$ **c.** $\tan \theta = 0.9432$

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය සයින් වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.

a. $\sin 10^{\circ}\ 30'$ **b.** $\sin 21^{\circ}\ 32'$ **c.** $\sin 25^{\circ}\ 57'$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් සයින අගයට අදාළ θ කෝණය සොයන්න.

a. $\sin \theta = 0.5000$ **b.** $\sin \theta = 0.4348$ **c.** $\sin \theta = 0.6437$

5. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය කෝසයින වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න. පිළිතුරුවල නිවැරදිතාව සයින් වගුව භාවිතයෙන් පරීක්ෂා කරන්න.

a. $\cos 5^{\circ}\ 40'$ **b.** $\cos 29^{\circ}\ 30'$ **c.** $\cos 44^{\circ}\ 10'$

6. පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝසයින අගයට ගැලපෙන θ කෝණය සොයන්න.

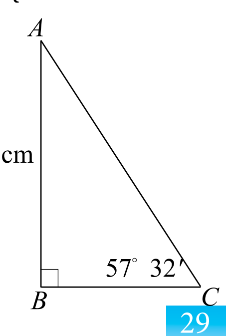
a. $\cos \theta = 0.4358$ **b.** $\cos \theta = 0.6450$ **c.** $\cos \theta = 0.9974$

18.5 ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

මීට පෙර 30°, 45° හා 60° කෝණ සඳහා පමණක් විසඳූ ගැටලු, දැන් $0^{\circ} - 90^{\circ}$ තුළ වූ ඕනෑම කෝණයක් ඇතුළත් වුවද විසඳිය හැකි ය. ත්‍රිකෝණමිතිය ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමේ දී පහත දැක්වෙන කරුණු සැලකිල්ලට ගැනීම වැදගත් ය.

1. සුදුසු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සැලකීම
2. එම ත්‍රිකෝණයෙහි සුදුසු කෝණයක් තෝරා ගැනීම
3. එම කෝණය සඳහා සුදුසු ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් යොදා ගැනීම

මේ සඳහා නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.



නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති මිනුම් අනුව, AC පාදයේ දිග සොයන්න.

ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති කෝණය C ය. ඊට සම්මුඛ පාදයේ දිග දී ඇති අතර කර්ණයේ දිග සෙවිය යුතු ය. එමනිසා, සම්මුඛ පාදය හා කර්ණය සම්බන්ධ කෙරෙන සයින අනුපාතය යොදා ගත යුතු ය.

$$\sin 57^\circ\ 32' = \frac{AB}{AC}$$

$$0.8437 = \frac{10}{AC}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{10}{0.8437}$$

ලඝුගණක ඇසුරෙන් මෙම බෙදීම කරමු.

$AC = \dfrac{10}{0.8437}$ ලෙස ගනිමු.

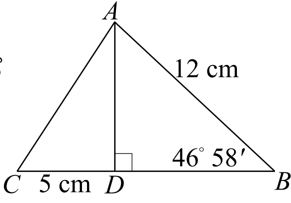
එවිට, $\lg AC = \lg \dfrac{10}{0.8437}$

$$= \lg 10 - \lg 0.8437$$
$$= 1 - \bar{1}.9262$$
$$= 1.0738$$
$$\therefore AC = \text{antilog } 1.0738$$
$$\therefore AC = 11.85$$

එමනිසා, AC දිග (දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව) 11.85 cm වේ.

නිදසුන 2

ABC ත්‍රිකෝණයේ, BC පාදයට ලම්බව AD ඇඳ ඇත. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව, $A\hat{C}B$ හි අගය සොයන්න.



මෙහි, ACB කෝණය සෙවීම සඳහා සැලකිය යුතු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය වන්නේ ADC ය. එම ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකක දිග දන්නේ නම් $A\hat{C}B$ කෝණය සෙවිය හැකි ය. එහි එක් පාදයක දිග වන CD, 5 cm ලෙස දී ඇත. තවත් පාදයක දිග සොයා ගත යුතු ය. ඒ සඳහා ADB ත්‍රිකෝණය සලකා AD සෙවිය හැකි ය. එමනිසා, ADB ත්‍රිකෝණය සලකා, සයින, අනුපාතය යොදා AD දිග මුලින් ම සොයමු.

$$\sin\ 46^\circ\ 58' = \frac{AD}{AB}$$

$$0.7310 = \frac{AD}{12}$$

$$12 \times 0.7310 = AD$$

$$\therefore \quad AD = 8.7720 \text{ cm}$$

දැන්, ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $\tan A\hat{C}D = \dfrac{AD}{CD}$

$$= \frac{8.7720}{5}$$

$$\therefore \quad \tan A\hat{C}D = 1.7544$$

$$\therefore \quad A\hat{C}D = 60^\circ\ 18'$$

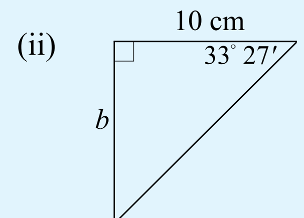
18.5 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ, වීජීය සංකේතයෙන් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

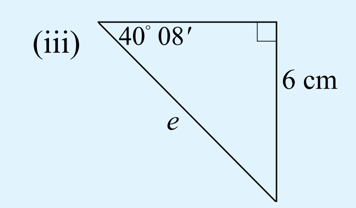
(i)

a 12 cm 30° 10′

(ii)



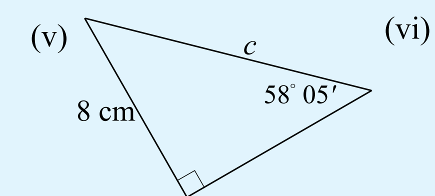
(iii)



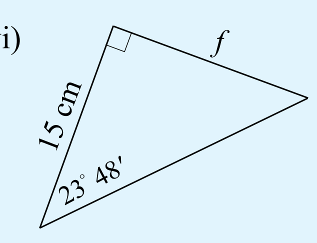
(iv)

27° 15′ 20 cm d

(v)



(vi)

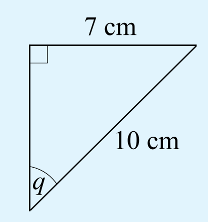


2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ, වීජීය සංකේතයෙන් දක්වා ඇති කෝණයේ අගය සොයන්න.

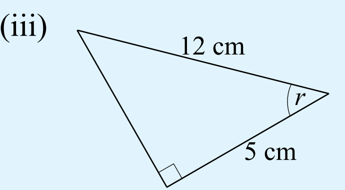
(i)

5 cm p 8 cm

(ii)



(iii)

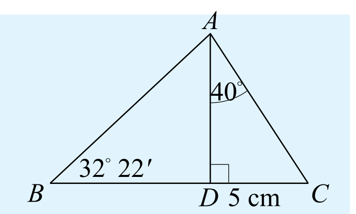


3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත ABC ත්‍රිකෝණයේ

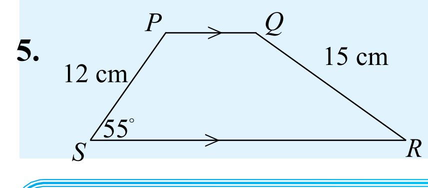
(i) පරිමිතිය

(ii) වර්ගඵලය

සොයන්න.



4.

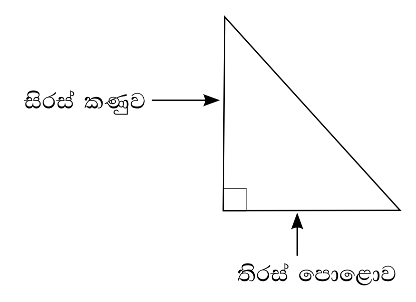


රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$ හි අගය $30^\circ\ 58'$ ක් බව පෙන්වන්න.

5. $PQRS$ ත්‍රපීසියමේ $SR > PQ$ වේ. $PS = 12$ cm හා $QR = 15$ cm නම් $Q\hat{R}S$ හි අගය සොයන්න.

18.6 සිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවට සමාන්තර වූ තලය තිරස් තලයකි. තිරසට ලම්බ වූ තලය සිරස් තලයකි. පොළොවට ලම්බව සිටුවා ඇති කණුවක් සිරස් කණුවකි. එවැනි පිහිටීමක් රූපයේ දැක්වේ.



ආරෝහණ හා අවරෝහණ කෝණ ඇතුළත් පරිමාණ රූප ඇසුරෙන් වස්තුවක පිහිටීම සෙවීමට ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගෙන ඇත. දැන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඇසුරෙන් වස්තුවල පිහිටීම සෙවීම පිළිබඳ ව ඉගෙන ගනිමු.

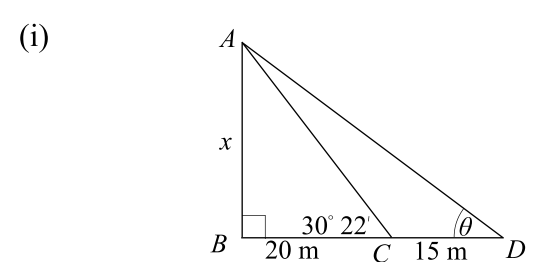
ඒ සඳහා පහත නිදසුන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

AB සිරස් කුළුනක පාමුල සිට සම බිමේ මීටර 20ක් දුරින් වූ C ලක්ෂ්‍යයේ සිටින්නෙක්ට, කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $30^{\circ}\ 22'$කි. ඔහු කණුවෙන් විරුද්ධ දිශාවට සරල රේඛීය මාර්ගයක් ඔස්සේ, මීටර 15ක් ගොස් නැවත කුළුන මුදුන නිරීක්ෂණය කරයි.

(i) මෙම තොරතුරු දළ සටහනක දක්වන්න.
(ii) කුළුනේ උස ආසන්න මීටරයට සොයන්න.
(iii) දෙවන නිරීක්ෂණ අවස්ථාවේ කුළුන මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

(i)



(ii) කුළුනේ උස මීටර x යයි ගනිමු.

එවිට, ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\tan 30^{\circ}\ 22' = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^{\circ}\ 22' = \frac{x}{20}$$

$$\begin{aligned} x &= 20 \tan 30^{\circ}\ 22' \\ &= 20 \times 0.5859 \\ &= 11.718 \end{aligned}$$

$\therefore$ කුළුනේ උස 12 m පමණ වේ.

(iii) D හි දී, කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණ θ ලෙස ගනිමු.
එවිට; ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan \theta = \frac{12}{35}$$

$$\tan \theta = 0.3428$$

$$\therefore \quad \theta = 18^{\circ}\ 55'$$

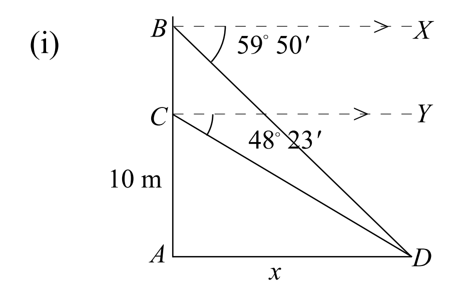
$\therefore$ දෙවන නිරීක්ෂණයේ දී කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $18^{\circ}\ 55'$ වේ.

නිදසුන 2

මහල් කිහිපයකින් යුතු සිරස් ගොඩනැගිල්ලක පොළොව මට්ටමේ සිට මීටර 10ක් වූ උසකින් පිහිටි කුඩා කවුළුවකින් පිටත බලන්නෙකුට, ගොඩනැගිල්ල පිහිටි බිමේ, ඈත නවතා තිබෙන යතුරු පැදියක් පෙනෙන අවරෝහණ කෝණය $48^{\circ}\,23'$කි. ඒ මොහොතේම ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයට ගොස් එහි පිහිටි තවත් කුඩා කවුළුවකින් නැවත වරක් පෙර දී නිරීක්ෂණය කළ යතුරු පැදිය නිරීක්ෂණය කළ විට අවරෝහණ කෝණය $59^{\circ}\,50'$ ක් විය.

(i) මෙම තොරතුරු දළ සටහනක දක්වන්න.
(ii) ගොඩනැගිල්ලේ සිට කොපමණ දුරකින් යතුරුපැදිය නතර කර තිබේ ද?
(iii) ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයේ කවුළුව තෙක් උස මීටරවලින් දශමස්ථාන දෙකකට ආසන්නව ගණනය කරන්න.

(i)



(ii) රූපයේ ACD ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වේ. ගොඩනැගිල්ලේ සිට යතුරුපැදිය තෙක් ඇති දුර මීටර x යැයි ගනිමු.

$Y\hat{C}D = 48^{\circ}\,23'$ නිසා $A\hat{D}C = 48^{\circ}\,23'$ (ඒකාන්තර කෝණ)

එවිට, ADC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්,

$$\tan 48^{\circ}\,23' = \frac{AC}{AD}$$

$$\tan 48^{\circ}\,23' = \frac{10}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{10}{\tan 48^{\circ}\,23'} = x$$

$$\text{එනම්, } x = \frac{10}{1.1257}$$

$$= 8.883$$

x හි අගය ලඝුගණක වගු මගින් ලබා ගැනීම

$$\lg x = \lg 10 - \lg 1.1257$$
$$= 1 - 0.0515$$
$$\therefore x = \text{antilog } 0.9485$$
$$= 8.883$$

$\therefore$ ගොඩනැගිල්ලේ සිට යතුරුපැදියට ඇති දුර මීටර 8.883 m වේ.

(iii) ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $A\hat{D}B = 59^\circ\ 50'$

$$\tan 59^\circ\ 50' = \frac{AB}{AD}$$

$$\tan 59^\circ\ 50' = \frac{AB}{8.883}$$

$$AB = 8.883 \times 1.7205$$
$$= 15.28$$

$\therefore$ ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයේ කවුළුව තෙක් උස 15.28 m පමණ වේ.

ඉහත නිදසුන් අනුව පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

18.6 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් දළ රූප සටහන් අඳින්න.

(i) AB සිරස් කුළුනක මුදුන A වේ. කුළුනේ පාමුල සිට සම බිමේ මීටර 20ක් ඈතින් සිටින නිරීක්ෂකයෙකුට කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $55^\circ\ 20'$ කි. නිරීක්ෂකයාගේ උස 1.5 m වේ.

(ii) මීටර 35ක් උස දුරකථන සම්ප්‍රේෂණ කුළුණක මුදුනේ සිට එහි අලුත්වැඩියාවක යෙදෙන කාර්මිකයෙක්, කුළුණු පිහිටි බිමේ, ඈත නතර කර තිබෙන වාහනයක් පෙනෙන, අවරෝහණ කෝණය 50°කි.

(iii) සිරස් ගොඩනැගිල්ලක දෙවන මහලේ සිටින්නෙක්, මීටර 75ක් දුරින් වූ ප්‍රදීපස්ථම්භයක මුදුන $27^\circ\ 35'$ ක ආරෝහණ කෝණයකින් ද, එහි පාමුල පෙනෙන අවරෝහණ කෝණය $41^\circ\ 15'$ කි.

(iv) ළමයෙක්, සිරස් විදුලි සම්ප්‍රේෂණ කුළුනක මුදුන 30° ආරෝහණ කෝණයකින් දකියි. 25 m ක් කුළුන දෙසට ලංවී නැවත කුළුන දෙස බැලූ විට එහි මුදුන පෙනෙන්නේ 50°ක ආරෝහණ කෝණයකිනි (ළමයාගේ උස නොසළකා හරින්න).

2. 20 m උස ප්‍රදීපස්ථම්භයක මුදුනේ වූ ජනේලයකින්, පිටත බලන ආරක්ෂක නිලධාරියෙක් මුහුදේ යාත්‍රා කරන නැවක් $30^\circ\ 15'$ක අවරෝහණ කෝණයකින් තිබෙන බව නිරීක්ෂණය කරයි. නැවට ප්‍රදීපස්ථම්භයේ සිට ඇති දුර ගණනය කරන්න.

3. සිරස් කුළුනක පාමුල සිට සම මට්ටමේ මීටර 20ක් ඈතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කුළුන මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $35^\circ\ 12'$ක් විය. කුළුන සිරස් ව රඳවා ගැනීමට කුළුන පාමුල සිට මීටර 20ක් දුරින් සම බිමේ සවිකර ඇති කුඤ්ඤයක සිට කම්බියක්, හොඳින් ඇදෙන සේ කුළුන මුදුනට ගැට ගැසීමට අවශ්‍ය ය. ඒ සඳහා අවශ්‍ය කම්බියේ දිග සොයන්න. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසළකා හරින්න, ගැට ගැසීම සඳහා කම්බියේ මීටර බාගයක දිගක් අවශ්‍ය බව සලකන්න)

4. සිරස් විදුලි කම්බි කණුවක පාමුල පිහිටි සම බිමෙහි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කණුව මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 50° කි. කණුවේ උස මීටර 12ක් නම්, කණුව පාමුල සිට නිරීක්ෂණ ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර සොයන්න. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසළකා හරින්න)

5. තිරස් පොළොව මත A හා B සිරස් කුළුනු දෙකක මීටර් 200ක පරතරයකින් පිහිටා තිබේ. A කුළුන මුදුනේ සිට, B හි මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $4^\circ\ 10'$ක් ද, B හි පාමුල අවරෝහණ කෝණය $8^\circ\ 15'$ක් ද බව පෙණුනි.

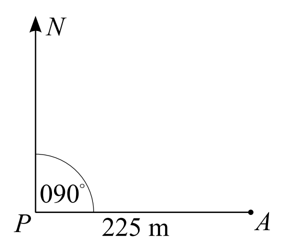
(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.
(ii) A හා B කුළුනුවල උස වෙන වෙන ම ආසන්න මීටරයට සොයන්න.
(iii) A කුළුන පාමුල සිට, B කුළුන මුදුනෙහි ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

6. එකිනෙකට මීටර 20 දුරින් පිහිටි සිරස් කණු දෙකක් අතර හරිමැද සිටින්නෙකුට එක් කණුවක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 60° ක් බව ද, අනෙක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 30° ක් බව ද පෙනුනි. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසලකා හරින්න).
(i) කණු දෙකේ උස වෙන වෙනම සොයන්න.
(ii) එක් කණුවක මුදුනේ ගැට ගසන ලද කම්බියක් අනෙක් කණුවේ මුදුනේ හොඳින් ඇදෙන සේ ගැට ගසා ඇත. ගැටවලට යොදා ගත් කොටස නොසළකා හැර එම කම්බියේ දිග සොයන්න

18.7 තිරස් තලයේ කෝණ

තිරස් තලය මත පිහිටීම්වල දිශාව දැක්වීම සඳහා දිගංශය යොදා ගන්නා බව මීට කලින් ඔබ උගෙන ඇත. දිගංශය යනු, උතුරු දිශාවෙන් ආරම්භ වී, දක්ෂිණාවර්තව මැනීම සිදු කෙරෙන කෝණ මිනුමකි. එය දැක්වීම සඳහා අංක තුනක් යොදා ගැනීම සාමාන්‍ය ක්‍රමයයි. නූතන බිම් මැනුම් උපකරණවල දිගංශය සමඟ දුර ද සටහන් වේ.

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට බලන විට නැගෙනහිර දිශාවෙන් පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ දිගංශය 090° ක් ද දුර මීටර 225ක් ද වේ. එම විස්තරය මෙසේ රූපසටහනක දැක්විය හැකි ය.



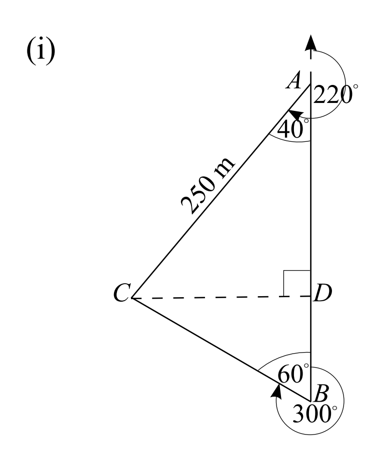
දිගංශය සහිත රූපසටහන්වල ගණනය කිරීම් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගනිමින්, සිදුකරන ආකාරය නිදසුනකින් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

උතුරු දකුණු දිශාව ඔස්සේ වැටී ඇති සෘජු මාර්ගයක A නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට, මාර්ගයෙන් පිටත පිහිටි C නම් ලක්ෂ්‍යයක වූ සෘජු කුළුනක පාමුල 220° ක දිගංශයකින් හා මීටර 250ක දුරින් පෙනුනි. සෘජු මාර්ගයේ ම පිහිටි B නම් වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට C පෙනුනේ 300° ක දිගංශයකිනි.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.
(ii) කුළුණ පාමුල සිට AB මාර්ගයට ඇති දුර සොයන්න.
(iii) AB දුර සොයන්න.

(i)



(ii) A හි සිට C පෙනෙන දිගංශය 220° නිසා $D\hat{A}C = 220^\circ - 180^\circ$

$= 40^\circ$

එවිට, ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\sin 40^\circ = \dfrac{CD}{AC}$

$$AC \sin 40^\circ = CD$$
$$CD = 250 \sin 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.6428$$
$$= 160.7000$$

$\therefore$ C සිට AB මාර්ගයට ඇති කෙටිම දුර 160.7 m

(iii) AB දුර $= AD + DB$

ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\cos 40^\circ = \dfrac{AD}{AC}$

$$AD = AC \cos 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.7660$$
$$= 191.5000$$
$$= 191.5 \text{ m}$$

BDC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{DB}$

$$DB = \frac{CD}{\tan 60^\circ}$$

$$= \frac{160.7}{1.732}$$

$$= 92.78 \text{ m}$$

$\therefore$ AB මාර්ගයේ දිග $= 191.5 + 92.78$ m

$= \underline{\underline{284.28 \text{ m}}}$

18.7 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරුවලට අදාළ දළ රූප සටහන් අඳින්න.

(i) A සිට 080°ක දිගංශයකින් හා මීටර 12ක් දුරින් B පිහිටා ඇත.

(ii) P සිට 120°ක දිගංශයකින් හා මීටර 50ක් දුරින් Q ද, Q සිට 040°ක දිගංශයකින් හා මීටර 25ක් දුරින් R ද පිහිටයි.

(iii) X සිට 150° ක දිගංශයකින් හා මීටර 30ක් දුරින් Y ද, Y සිට 200° ක දිගංශයකින් හා මීටර 100ක් දුරින් Z ද, Z සිට 080° ක දිගංශයකින් හා මීටර 50ක් දුරින් A ද පිහිටයි.

2. A නම් ස්ථානයෙන් ගමන් අරඹන යතුරුපැදිකරුවෙක්, නැගෙනහිර දිශාව ඔස්සේ කිලෝමීටර 8ක් ගොස්, එතැනින් උතුරු දිශාවට හැරී, කිලෝමීටර 6ක් ගමන් කර B නම් ස්ථානයේ නතර වේ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූප සටහනකින් දක්වන්න.

(ii) B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(iii) A හා B අතර කෙටිම දුර සොයන්න.

3. නැවක්, A නම් වරායෙන් පිටත්ව 040°ක දිගංශයකින්, කිලෝමීටර 150ක් දුර යාත්‍රා කර B වරායට ළඟා වේ. B වරාය පිහිටා ඇතතේ,

(i) A වරායට කවර දුරක් උතුරින් ද?

(ii) A වරායට කවර දුරක් නැගෙනහිරින් ද?

4. සෘජු සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක පළල මැන ගැනීමට උත්සාහ දරණ ශිෂ්‍යයෙක්, ඉවුරේ ලක්ෂ්‍යයක හිඳ, ඊට ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරේ, ඉවුරුවලට ලම්බක දිශාවක පිහිටි ගසක් නිරීක්ෂණය කරයි. එතැන් සිට මීටර 75 ක් ඉවුර දිගේ ගොස් බැලූ විට ගස පිහිටි දිගංශය 210°ක් බව නිරීක්ෂණය කළේ ය. දිගංශය සහිත දළ රූපසටහනක් ඇඳ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන් ගඟේ පළල ආසන්න මීටරයට සොයන්න.

5. වන රක්ෂිත කණ්ඩායමක් විසින් ඈත වනය තුළ හටගෙන ඇති ගින්නක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබී ය. ඔවුහු ඒ මොහොතේ ලබා ගත් තොරතුරු අනුව C කඳවුරේ සිට 070° ක වූ දිගංශයකින් පිහිටි A මහා මාර්ගය ඔස්සේ 2.5 kmක් ගොස් P ස්ථානයටත් එම ස්ථානයෙන්, 340° ක දිගංශයකින් 1.5 km ගොස් F නම් ගින්න තිබූ ස්ථානයටත් ළඟා වූහ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූප සටහනකින් දක්වන්න.

(ii) ආරක්ෂක භටයින් කණ්ඩායම මහා මාර්ගයේ සිට ගිය තිබූ තැනට ඉක්මනින් ළඟා වීමට P ස්ථානයෙන් හැරීමට තෝරා ගැනීම සුදුසු බව හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

(iii) ආරක්ෂක භටයින් සිය කඳවුරේ දී මුල් වරට ගිය තිරීක්ෂණය කරන්නට ඇත්තේ කවර දිගංශයකින් ද?

18.8 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සඳහා ගණකය භාවිතය

ගණකය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සම්බන්ධ ගණනය කිරීම්වල දී මුලින් ම, දර්ශන තිරයේ "*DEG*" ප්‍රදර්ශණය වන සේ, MODE යතුර ක්‍රියාත්මක කරවිය යුතු ය.

මෙම ගණනය කිරීම් සිදුකරන අයුරු නිදසුන් ඇසුරෙන් බලමු.

නිදසුන 1

(i) tan 35° (ii) sin 35° (iii) cos 35° යන අගයන් ලබා ගැනීම සඳහා ගණකයේ යතුරු ක්‍රියාත්මක කරවන ආකාරය ගැලීම් සටහනකින් දක්වන්න.

(i) tan 35° ON — tan — 3 — 5 — = → 0.7002

(ii) sin 35° ON — sin — 3 — 5 — = → 0.5736

(iii) cos 35° ON — cos — 3 — 5 — = → 0.8192

නිදසුන 2

(i) tan θ = 1.2131 (ii) sin θ = 0.7509 (iii) cos θ = 0.5948 වූ විට එක් එක් අවස්ථාවේ දී θ හි අගය ගණනය

(i) ON — SHIFT — tan — 1 — . — 2 — 1 — 3 — 1 — = → 50.5°

(ii) ON — SHIFT — sin — 0 — . — 7 — 5 — 0 — 9 — = → 48.66°

(iii) ON — SHIFT — cos — 0 — . — 5 — 9 — 4 — 8 — = → 53.5°

සටහන: මෙහි දී අංශකවලින් පමණක් කෝණවල අගය ලැබෙන බව නිරීක්ෂණය කරන්න. නිදසුනක් ලෙස, අංශක 50.5 යනු $50^\circ\ 30'$ වේ.

18.8 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන කෝණ අගයයන් සඳහා (i) tan අගය (ii) sin අගය (iii) cos අගය ගණකය භාවිතයෙන් ලබා ගැනීමට ක්‍රියාත්මක කළ යුතු යතුරු පිළිවෙළින් දක්වන්න.

a. 40° **b.** 75° **c.** 88° **d.** 43°

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ θ හි අගය ලබා ගැනීමට ගණනය ක්‍රියාත්මක කළ යුතු ආකාරය ගැලීම් සටහනකින් දක්වන්න.

a. $\sin\theta = 0.9100$ **d.** $\cos\theta = 0.1853$ **g.** $\tan\theta = 0.5736$
b. $\sin\theta = 0.7112$ **e.** $\cos\theta = 0.7089$ **h.** $\tan\theta = 0.7716$
c. $\sin\theta = 0.1851$ **f.** $\cos\theta = 0.4550$ **i.** $\tan\theta = 0.9827$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. P හා Q නැව් දෙකක් වරායකින්, එක විට පිටත් වෙයි. එක් එක් නැව පැයට කිලෝ මීටර 18ක් වූ සමාන වේගයෙන් ගමන් කරයි. P යාත්‍රා කරන්නේ වරායේ සිට 010° දිගංශයක වන අතර, Q යාත්‍රා කරන්නේ වරායේ සිට 320° ක දිගංශයකිනි. පැයකට පසු නැව් දෙක අතර දුර සොයන්න.

2. පාර දෙපස පිහිටි උස් ගොඩනැගිලි දෙකකින් එකක් අනෙකට වඩා මීටර 9ක් උස වේ. උසින් වැඩි ගොඩනැගිල්ලේ පාමුල සිට බලන විට අනෙක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $42^\circ\,20'$ කි. උසින් අඩු ගොඩනැගිල්ල මීටර 15ක් උස නම්, නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසලකා හරිමින්,

(i) ගොඩනැගිලි දෙක අතර දුර සොයන්න.
(ii) උසින් අඩු ගොඩනැගිල්ලේ පාමුල සිට උසින් වැඩි ගොඩනැගිල්ලේ මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm හා $A\hat{B}C = 30^\circ\,26'$ වේ. A සිට BCට ඇඳි ලම්බය AX වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

4. තිරස් තලයක පිහිටි කොඩි කණු දෙකක් බිමට සිටුවා ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කරන රේඛාව මත A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක් තිබේ. A හි සිට බැලූ විට කොඩි කණු මුදුන්වල ආරෝහණ කෝණ 30° ද, 60° ද වේ. B සිට බැලූ විට ඒවායේ ආරෝහණ කෝණ පිළිවෙළින් 60° ද 45° ද වේ. AB දිග 10 m නම්

(i) කොඩි කණු දෙකේ උස වෙන වෙන ම සොයන්න.
(ii) කොඩි කණු දෙක අතර දුර සොයන්න.

*. මෙම අභ්‍යාසයේ පිළිතුරු ගණක යන්ත්‍රය භාවිතයෙන් නැවත පරීක්ෂා කරන්න.

19 න්‍යාස

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- න්‍යාසයක් හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක, අවයව සහ ගණය හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාස එකතු කිරීම සහ අඩු කිරීම හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාසයක් තවත් න්‍යාසයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාස ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

19.1 න්‍යාස හැඳින්වීම

න්‍යාස පිළිබඳ අදහස1854 දී බ්‍රිතාන්‍ය ගණිතඥයෙකු වූ ආතර් කේලි විසින් හඳුන්වා දෙන ලදි. සරල උදාහරණයක් මගින් න්‍යාස හඳුනා ගනිමු.

වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිතය සහ විද්‍යාව යන විෂයන් සඳහා විමල්, ෆාරුක් හා රාධා ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දැක්වේ.

	ගණිතය	විද්‍යාව
විමල්	75	66
ෆාරුක්	72	70
රාධා	63	81

වගුවේ ඇති සංඛ්‍යාත්මක අගයන්, පහත දැක්වෙන ආකාරයට න්‍යාසයකින් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි තීරවලින් විෂයනුත් පේළිවලින් ශිෂ්‍යයනුත් දැක්වේ. එසේ ම, පහත දැක්වෙන පරිදි ද න්‍යාස ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි, තීරු මගින් ශිෂ්‍යයනුත් පේළි මගින් විෂයනුත් දැක්වේ.

මෙලෙස පේළි සහ තීරු ආකාරයෙන් සැකසූ සංඛ්‍යා වැලක් **න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ.

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස සඳහා නිදසුන් කිහිපයකි.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයක අඩංගු සංඛ්‍යාවලට න්‍යාසයේ අවයව යයි කියනු ලැබේ. අවයව සංඛ්‍යා ආකාරයෙන් මෙන් ම වීජීය සංකේත හෝ ප්‍රකාශන ලෙස ද තිබිය හැකි ය.

න්‍යාසයක් නම් කරනු ලබන්නේ ඉංග්‍රීසි ලොකු අකුරු (Capital letters) වලිනි. අවයව සඳහා විජීය සංකේත යොදන අවස්ථාවල, න්‍යාසයේ අවයව ඉංග්‍රිසි කුඩා අකුරෙන් (Simple letters) දක්වයි.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස තුනක් නම් කර ඇති ආකාරය යි.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

නිදසුන 2

කාටීසීය ඛණ්ඩාංක තලයක පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක (0, 5) (4, 3) වේ. මෙම තොරතුරු න්‍යාසයකින් දක්වන්න. එය P ලෙස නම් කරන්න.
වගුවක් ලෙස

	A	B
x	0	4
y	5	3

න්‍යාසයක් ලෙස

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

න්‍යාසයක ගණය හා විශේෂ න්‍යාස වර්ග කිහිපයක්

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය සලකන්න.

A න්‍යාසයේ ඇති පේළි ගණන 2 කි. තීර ගණන 3 කි. න්‍යාසයේ ගණය පේළි සහ තීර ඇසුරෙන් 2×3 ලෙස දක්වනු ලැබේ. A යනු "දෙකේ තුනේ" න්‍යාසයක් යැයි කියනු ලැබේ.

ඒ බව

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$ ලෙස සමහර අවස්ථාවල දී ලියනු ලැබේ.

සටහන: ඉහත ආකාරයට න්‍යාසයක ගණය සඳහන් කිරීමේ දී පළමුව පේළි ගණන ද පසුව තීර ගණන ද සඳහන් කිරීම සම්මතය වේ.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයේ පේළි ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 3 \times 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 1$
තීර ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ ගණය $= 1 \times 3$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 1$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 1$

(iv) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 2$

පේළි න්‍යාස, තීර න්‍යාස සහ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස

එක් පේළියක් පමණක් ඇති න්‍යාස **පේළි න්‍යාස** ලෙසත්, එක් තීරයක් පමණක් ඇති න්‍යාස **තීර න්‍යාස** ලෙසත්, පේළි ගණන හා තීර ගණන සමාන වන න්‍යාස **සමචතුරස්‍ර න්‍යාස** ලෙසත් හැඳින්වේ. පේළි 2ක් හා තීර 2ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් යැයි ද පේළි 3ක් හා තීර 3ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 3 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ආදි ලෙස නම් කෙරේ.

පේළි, තීර හා සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා නිදසුන් ලෙස

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ යනු පේළි න්‍යාසයකි.

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යනු තීර න්‍යාසයකි.

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ යනු සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

ඒකක න්‍යාස සහ සමමිති න්‍යාස

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ඉහත දැක්වෙන සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයේ කොටු කර දක්වා ඇත්තේ ප්‍රධාන විකර්ණයයි. ඉහළ වම් කෙළවරේ සිට පහළ දකුණත් කෙළවර දක්වා ඇති අවයව දාමය ප්‍රධාන විකර්ණය ලෙස හැඳින්වේ.

සටහන: ප්‍රධාන විකර්ණය අර්ථ දැක්වෙන්නේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි. ප්‍රධාන විකර්ණය බොහෝ විට, සරලව, විකර්ණය යන නමින් ද හැඳින්වේ.

පහත කොටුකර දක්වා ඇත්තේ ගණය 2×2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක ප්‍රධාන විකර්ණය යි.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

පහත දැක්වෙන න්‍යාසය විශේෂ ආකාරයේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසයේ ප්‍රධාන විකර්ණයේ පිහිටි සියලු අවයවවල අගය 1 වේ. විකර්ණයේ පිහිටි අවයව හැර ඉතිරි අවයව සියල්ල 0 වේ. මෙවැනි න්‍යාසයක් **ඒකක න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ. A යනු ගණය 3×3 වූ ඒකක න්‍යාසයකි. පහත දැක්වෙන්නේ ගණය 2×2 වූ ඒකක න්‍යාසයකි.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ඒකක න්‍යාස නම් කිරීම සඳහා I අක්ෂරය යොදා ගැනේ. පේළි n හා තීර n සහිත ඒකක න්‍යාස $I_{n \times n}$ මගින් ලියා දැක්වේ. ඒ අනුව,

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලියා දැක්වේ.

පහත දැක්වෙන න්‍යාසයෙහි ඇති විශේෂත්වය ඔබට නිරීක්ෂණය කළ හැකි ද?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

X හි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති අවයව නිරීක්ෂණය කරන්න. ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති සමාන අගයන්ගෙන් යුත් අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. මෙවැනි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටන න්‍යාස **සමමිති න්‍යාස** ලෙස හැඳින්වේ.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y සහ I න්‍යාසවල ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. ඒ නිසා Y සහ I සමමිති න්‍යාස වේ.

සටහන: සමමිති න්‍යාස අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි.

19.1 අභ්‍යාසය

1. පලතුරු වෙළඳ සැලකින් සරත් දොඩම් ගෙඩි 2ක් සහ අඹ ගෙඩි 3ක් ද කමල් දොඩම් ගෙඩි 4ක් සහ අඹ ගෙඩි 1ක් ද රාජු දොඩම් ගෙඩි 1ක් සහ අඹ ගෙඩි 5ක් ද මිල දී ගනියි.

(i) සරත් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(ii) කමල් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(iii) රාජු මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(iv) සරත්, කමල් සහ රාජු මිල දී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ, පේළි ලෙස ඇති න්‍යාසයක් ගොඩනගන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියා දක්වන්න.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින් පේළි හා තීර න්‍යාස තෝරා ලියා දක්වන්න.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින්

(i) සමචතුරස්‍ර න්‍යාස
(ii) සමමිති න්‍යාස
(iii) ඒකක න්‍යාස තෝරා ලියන්න.

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසවල විකර්ණ කොටු කර දක්වන්න.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.2 න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

සංඛ්‍යා සඳහා එකතු කිරීම, අඩු කිරීම, ගුණ කිරීම ආදි ගණිත කර්ම අපි උගෙන ඇත්තෙමු. එවැනි ගණිත කර්ම යොදා ගැනීමෙන් බොහෝ ප්‍රායෝගික ගැටලු පහසුවෙන් විසඳා ගත හැකි බව ද අපි අත් දැක ඇත්තෙමු. න්‍යාස සඳහා ද ගණිත කර්ම අර්ථ දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම න්‍යාස එකතු කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු.

පහත දැක්වෙන A හා B න්‍යාස දෙක සලකන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

මෙම න්‍යාස දෙක ම එකම ගණය සහිත න්‍යාස යි. එම ගණය 3×2 වේ. A හා B න්‍යාස දෙකෙහි එකතුව ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ A හා B න්‍යාසවල අනුරූප අවයව එකතු කිරීමෙන් ලැබෙන න්‍යාසය යි.

ඒ අනුව,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලැබේ.

මෙහි දී අනුරූප අවයව ලෙස හැඳින්වෙන්නේ එක ම ස්ථානයේ පිහිටි අවයව යි. නිදසුනක් ලෙස, A න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය වන්නේ 1ය. B න්‍යාසයෙහි ඊට අනුරූප අවයවය වන්නේ 6ය; එනම්, B න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවයයි.
දැන් වීජීය සංකේත සහිත නිදසුනක් සලකමු.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ හා } Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ නම්, } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ දක්වා ඇත්තේ එක ම ගණය සහිත න්‍යාසවලට පමණි. ඒ අනුව, ගණ වෙනස් වන න්‍යාස සඳහා න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ නොදැක්වේ.
න්‍යාස එකතු කිරීම යොදා ගත හැකි ආකාරය නිදසුනක් ඇසුරෙන් දැන් සලකා බලමු. මෙම නිදසුන ඉතා සරල වුවත්, ප්‍රායෝගික යෙදීම් සඳහා න්‍යාස යොදා ගන්නා ආකාරය එයින් මනාව පිළිඹිබු වේ.

නිදසුන 1

ප්‍රවීන් හා තරිඳු පාසල් ක්‍රිකට් කණ්ඩායමේ පන්දු යවන්නන් දෙදෙනෙකි. 2014 හා 2015 වසරවලදී පැවැත්වුණු එක් දින හා දෙදින පාසල් තරගමාලාවල දී ඔවුන් දෙදෙනා ලබා ගත් කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ විස්තර පහත වගු දෙකෙහි දැක්වේ.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	21	23
තරිඳු	15	16

එක් දින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

	2014	2015
ප්‍රවීන්	14	16
	9	19

දෙදින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

එක් දින තරග සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය A ලෙසත්, දෙදින තරග සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය B ලෙසත් නම් කරමු. එවිට,

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \text{ හා } B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. මෙම න්‍යාසවල, තීර මගින් වසර සහ පේළි මගින් පන්දු යවන්නන් දැක්වේ. $A + B$ න්‍යාසය සොයමු.

.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

මෙම $A + B$ න්‍යාසයෙන් දැක්වෙන්නේ කුමක්දැයි සිතා බලන්න. එයින් දැක්වෙන්නේ ප්‍රවීන් හා තරිඳු 2014 වසරේදීත් 2015 වසරේදීත් එක් දින හා දෙදින තරගවලදී ලබාගත් මුළු කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ තොරතුරු ය. එය, වගුවක ආකාරයෙන් මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	35	39
තරිඳු	24	35

මුළු කඩුලු ගණන

න්‍යාසයකින් තවත් න්‍යාසයක් අඩු කිරීම ද මේ ආකාරයට අර්ථ දැක්වේ. එහි දී සිදු කරන්නේ අනුරූප අවයව අඩු කිරීමයි. මේ සඳහා ද න්‍යාස දෙක එක ම ගණයේ විය යුතු ය. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ නම්, } A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ වේ.}$$

තවත් නිදසුනක් සලකමු.

X යනු ගණය 3×3 වන සෑම අවයවයක්ම 2 වන න්‍යාසය ද Y යනු ගණය 3×3 වන ඒකක න්‍යාසය ද නම් $X - Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ හා } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ වේ.}$$

එමනිසා,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස දෙකක සමානතාව

න්‍යාස දෙකක් එකිනෙකට සමාන වේ යන්නෙහි තේරුම කුමක්දැයි විමසා බලමු.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A හා B න්‍යාස සමාන වීමට $a = 2, b = 3, c = 10$ හා $d = 9$ විය යුතු ය. එනම්, එක් න්‍යාසයක එක් එක් අවයවය අනෙක් න්‍යාසයේ අනුරූප අවයවයට සමාන විය යුතු ය. එවැනි අවස්ථාවක දී න්‍යාස දෙක සමාන වේ යැයි කියනු ලැබේ.

සටහන: න්‍යාස දෙකක සමානතාව අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද ගණය සමාන වූ න්‍යාස සඳහා පමණ යි.

19.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ නම් a, b සහ c හි අගය සොයන්න.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ නම් a , b , c සහ d හි අගය සොයන්න.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ නම් x, y සහ z හි අගය සොයන්න.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ නම් x සහ y සොයන්න.

19.3 න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

මීළඟට අපි න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු. න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ න්‍යාසයේ සෑම අවයවයක් ම සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කිරීමයි. A න්‍යාසය k සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසය kA ලෙස ලියනු ලැබේ. මෙහි දී න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව පමණක් අවධානය යොමු කරමු. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසය 5න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 5 \times (-2) & 5 \times 8 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය යි.

A න්‍යාසය -3න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$-3A = \begin{pmatrix} -3 \times 3 & -3 \times 1 & -3 \times 0 \\ -3 \times -2 & -3 \times 8 & -3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & -24 & -3 \end{pmatrix}$$

න්‍යාසය යි.

සටහන: A නම් න්‍යාසයක් k නම් සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසයේ ගණය A හි ගණය ම වේ.

නිදසුන: $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ නම් $3X - 2Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$3X - 2Y = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

19.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $-2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vi) $-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ නම් a , b, c සහ d හි අගයන් සොයන්න.

3. $4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ නම් x , y සහ z හි අගයන් සොයන්න.

4. $2\begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ නම් x , y, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

19.4 න්‍යාස ගුණ කිරීම

ඉහත අර්ථ දැක්වුණු න්‍යාස එකතු කිරීම, න්‍යාස අඩු කිරීම හා න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම යන ගණිත කර්ම, සංඛ්‍යා සඳහා වූ ගණිත කර්ම ආකාරයේ ම බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත. එසේ නමුත්, න්‍යාස ගුණ කිරීම අර්ථ දැක්වෙන්නේ තරමක් වෙනස් ස්වරූපයකිනි. න්‍යාස ගුණ කිරීම පහත පරිදි විස්තර කළ හැකි ය.

මුලින් ම පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරු සලකා බලමු. A යනු ගණය $1 \times m$ වන පේළි න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $m \times 1$ වන තීර න්‍යාසයක් ද වන විට AB යන ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ. එම ගුණිතය අර්ථ දැක්වෙන ආකාරය විස්තර කිරීම සඳහා නිදසුනක් ලෙස

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද ගනිමු. ඒ අනුව, A යනු ගණය 1×2 වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය 2×1 වන න්‍යාසයක් ද වේ. එවිට,

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2)_{1 \times 1}$$

ලෙස AB ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් AB සොයන්න.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

ඕනෑ ම න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කළ හැකි බව අපි ඉහත දී ඉගෙන ගත්තෙමු. නමුත්, න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම කළ හැක්කේ ගණ සමාන වූ විට දී පමණක් බව ද අපි ඉගෙන ගත්තෙමු. න්‍යාස ගුණ කිරීම කිරීම කළ හැක්කේ ද සමහර අවස්ථාවල දී පමණි. ඉහත දී අපි දුටුවේ පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරුය. එහෙත්, ඊට වෙනස් ගණ සහිත න්‍යාස ද ගුණ කළ හැකි ය. වඩාත් සාධාරණ ව, A යනු $m \times n$ වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $n \times p$ වන න්‍යාසයක් ද නම්, එනම්, A හි තීර ගණනත් B හි පේළි ගණනත් සමාන වේ නම්, AB ගුණිතය අර්ථ දැක්විය හැකිය. ඒ කෙසේ දැයි දැන් සලකා බලමු. එවිට ලැබෙන න්‍යාසයයේ ගණය $m \times p$ බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න.

නිදසුනක් ලෙස, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ හා $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ නම් AB ගුණිතය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

ඉහත පේළි න්‍යාසයක් හා තීර න්‍යාසයක් ගුණ කළ අයුරින්, A හි එක් එක් පේළිය B හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කරන්න.

$$= \begin{pmatrix} (2\ \ 4)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (2\ \ 4)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \\ (3\ \ 5)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (3\ \ 5)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 + 4\times6 & 2\times8 + 4\times7 \\ 3\times1 + 5\times6 & 3\times8 + 5\times7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix}$$ (එක් එක් ගුණිතය සෙවීමෙන්)

ඉහත AB ගුණිත න්‍යාසයෙහි අවයව අර්ථ දැක්වූ ආකාරය මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.

- AB හි පළමු පේළියට හා පළමු තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා පළමු තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.

මෙම ආකාරයට ඕනෑ ම ගුණ කළ හැකි න්‍යාස දෙකක් ගුණ කළ හැකි ය. තවත් නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ නම් XY අර්ථ දැක්වෙන බව පෙන්වා එම න්‍යාසය සොයන්න. YX න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ ද?

X හි තීර ගණන $= 2$ ද Y හි පේළි ගණන $= 2$ ද වේ.
එනම්, X හි තීර ගණන Y හි පේළි ගණනට සමාන වේ. එමනිසා, XY ගුණිත න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ.

දැන්,

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X හි එක් එක් පේළිය Y හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කිරීමෙන්

$$= \begin{pmatrix} (4 \;\; 6) & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (2 \;\; 3) & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$$

දැන් YX ගුණිතය අර්ථ දැක්වේදැයි විමසා බලමු.
Yහි තීර ගණන 1 ද X හි පේළි ගණන 2 ද වේ. එනම්, Y හි තීර ගණන X හි පේළි ගණනට සමාන නොවේ. එමනිසා YX ගුණිතය අර්ථ නොදැක් වේ.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ හා $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. න්‍යාස ගුණිතය යටතේ මුලින් ම අපි QP ආකාරයේ ගුණිතය අර්ථ දක්වුයෙමු. එය ඉහත අර්ථ දැක්වීම අනුව ද සෙවිය හැකි ය. එනම් Q හි සෑම පේළියක් ම P හි සෑම තීරයකින් ම ගුණ කිරීමෙන් අවයව සෙවීමෙනි.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

එනම්, තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයකි. තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවක් ලෙස සැලකේ. එමනිසා, $QP = 9$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

තව ද, මෙහි දී PQ ද අර්ථ දැක්වේ. PQ මගින් ලැබිය යුත්තේ ගණය 2×2 වන න්‍යාසයකි.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

19.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ නම් a සහ b හි අගය සොයන්න.

3. A , B සහ C න්‍යාස තුනකි. $A \times B = C$ වේ. පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

A න්‍යාසයේ ගණය	B න්‍යාසයේ ගණය	C න්‍යාසයේ ගණය
1×2	2×1	....
2×2	.... $\times 1$	....
....$\times 2$	.... $\times 1$	1×1
.... $\times$	$1 \times$	2×2
.... $\times 1$	.... $\times 2$	$1 \times$ .....

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්,

(i) $P \times Q$
(ii) $P \times R$
(iii) $Q \times R$ සොයන්න.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ නම්

(i) AB සොයන්න.
(ii) BA සොයන්න.
(iii) AB සහ BA අතර සම්බන්ධය කුමක්ද?

5. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(i) CD සොයන්න.
(ii) DC සොයන්න.

20 අසමානතා

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- $ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳීමට හා විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාව මත නිරූපණය කිරීමට
- එදිනෙදා ජීවිතයට සම්බන්ධ ගැටලු අසමානතා මගින් දැක්වීම හා එම ගැටලු විසඳීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

10 ශ්‍රේණියේ දී උගත් $ax + b \gtreqless c$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳන අයුරු මතකයට නගා ගැනීමට පහත පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳන්න.

a. $3x - 2 > 4$ **b.** $\frac{x}{2} + 5 \leq 7$ **c.** $5 - 2x > 11$

d. $\frac{x}{-2} + 3 \leq 5$ **e.** $\frac{5x}{6} + 4 \geq 14$ **f.** $3 - 2x \geq 9$

20.1 $ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳීම

$ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා වීජීය ලෙස විසඳන අයුරු හා එම විසඳුම් ජ්‍යාමිතිකව නිරූපණය කරන අයුරු නිදසුන් මගින් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

$3x - 2 > 2x + 1$ අසමානතාව විසඳා එම විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

මෙහි දී, $3x - 2 > 2x + 1$ අසමානතාවෙහි x අඩංගු පද එක පසෙකටත්, සංඛ්‍යා අනෙක් පසටත් (සමීකරණ විසඳන අයුරින් ම) ගත යුතු ය.

$3x - 2 > 2x + 1$

$3x - 2 + 2 > 2x + 1 + 2$ (දෙපසට ම 2 එකතු කිරීමෙන්)

$3x > 2x + 3$

$3x - 2x > 2x + 3 - 2x$ (දෙපසින් ම $2x$ අඩු කිරීමෙන්)

$\underline{\underline{x > 3}}$

මෙය අසමානතාවේ විසඳුම යි. වචනයෙන් පැවසුවහොත්, විසඳුම් වන්නේ 3ට වඩා වැඩි සියලු තාත්වික සංඛ්‍යා යි. එම විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත පහත දැක්වෙන අයුරින් නිරූපණය කළ හැකි ය.

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

මෙහි දී 3 අයත් නොවන බව දැක්වීමට 3 දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යය වටා පාට නොකළ කවයක් අඳිනු ලැබේ.

නිදසුන 2

$5x + 3 \leq 3x + 1$ අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි **නිඛිලමය විසඳුම්**, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

$$5x + 3 \leq 3x + 1$$

$$5x + 3 - 3 \leq 3x + 1 - 3 \quad \text{(දෙපසින් ම 3 අඩු කිරීමෙන්)}$$

$$5x \leq 3x - 2$$

$$5x - 3x \leq 3x - 2 - 3x \quad \text{(දෙපසින් ම } 3x \text{ අඩු කිරීමෙන්)}$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{-2}{2} \quad \text{(දෙපස ම 2න් බෙදීමෙන්)}$$

$$\underline{\underline{x \leq -1}}$$

ඒ අනුව, විසඳුම් වන්නේ -1 ට අඩු හෝ සමාන සියලු තාත්වික සංඛ්‍යා යි. නිඛිලමය විසඳුම් වන්නේ -1 ට අඩු හෝ සමාන සියලු නිඛිල යි. එනම් $-1, -2, -3$ ආදි සංඛ්‍යා යි. සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත එම විසඳුම් මෙසේ නිරූපණය කළ හැකි ය.

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

සටහන: විශේෂ වශයෙන්, නිඛිලමය විසඳුම් ලෙස ගැටලුවෙහි අසා නොමැති නම්, විසඳුම් ලෙස සැලකිය යුත්තේ තාත්වික සංඛ්‍යායි.

නිදසුන 3

$2x - 5 \geq 4x - 4$ අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

$$2x - 5 \geq 4x - 4$$

$$2x - 5 + 5 \geq 4x - 4 + 5 \quad \text{(දෙපසට ම 5ක් එකතු කිරීමෙන්)}$$

$$2x \geq 4x + 1$$

$$2x - 4x \geq 4x + 1 - 4x \quad \text{(දෙපසින් ම } 4x \text{ අඩු කිරීමෙන්)}$$

$$-2x \geq 1$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{1}{-2} \quad \text{(දෙපස ම } -2 \text{ න් බෙදීමෙන්)}$$

$$\underline{\underline{x \leq \frac{-1}{2}}}$$

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

සටහන: සෘණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමේ දී අසමානතා ලකුණ මාරු කළ යුතු බව සිහිතබා ගන්න. සෘණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමක් නොඑන පරිදි මෙම ගැටලුව විසඳන අයුරු ද විමසා බලන්න.

20.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳන්න. තිබිලමය විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

a. $3x - 4 > 2x$ **b.** $6x + 5 \geq 5x$

c. $2x - 9 \leq 5x$ **d.** $8 - 3x > x$

e. $5 - 2x \leq 3x$ **f.** $12 - x > 3x$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි සියලු විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

a. $2x - 4 > x + 3$ **b.** $3x + 5 < x + 1$

c. $3x + 8 \geq 3 - 2x$ **d.** $5x + 7 \geq x - 5$

e. $3x - 8 \leq 5x + 2$ **f.** $2x + 3 \geq 5x - 6$

g. $x - 9 > 6x + 1$ **h.** $5x - 12 \leq 9x + 4$

i. $\dfrac{3x + 2}{2} > x + 3$ **j.** $2x - 5 \leq \dfrac{3x - 4}{-2}$

20.2 අසමානතා මගින් ගැටලු විසඳීම

නිදසුන 1

සමාන බරැති තේ පැකට් 8ක් සහ 1kg සීනි පැකට් 3ක් මල්ලක දමා ඇත. මල්ලට දැරිය හැකි උපරිම බර ප්‍රමාණය 5 kg වේ.

(i) තේ පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම් x ලෙස ගෙන x ඇතුළත් අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.

(ii) අසමානතාව විසඳා තේ පැකට්ටුවක තිබිය හැකි උපරිම බර සොයන්න.

සියල්ල ග්‍රෑම්වලට හරවා ගැනීම පහසු ය.

(i) තේ පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම්වලින් $= x$
තේ පැකට් 8ක බර ග්‍රෑම්වලින් $= 8x$
සීනිවල බර ග්‍රෑම්වලින් $= 3 \times 1000$
$= 3000$
මල්ලට දැරිය හැකි උපරිම බර ග්‍රෑම්වලින් $= 5 \times 1000$
$= 5000$

දී ඇති දත්ත අනුව $8x + 3000 \leq 5000$
මෙය අවශ්‍ය අසමානතාව යි.

(ii) $8x + 3000 \leq 5000$

$8x + 3000 - 3000 \leq 5000 - 3000$

$$\frac{8x}{8} \leq \frac{2000}{8}$$

$$x \leq 250$$

$\therefore$ තේ පැකට්ටුවක උපරිම බර $= 250$g

නිදසුන 2

සරත් අභ්‍යාස පොත් 5ක් සහ පෑන් 3ක් ද, කමනි, අභ්‍යාස පොත් 3ක් සහ පෑන් 11ක් ද මිලදී ගනී. සරත් වියදම් කළ මුදල කමනි වියදම් කළ මුදලට වඩා වැඩි හෝ සමාන වේ. තව ද පෑනක මිල රුපියල් 10ක් ද වේ.

(i) අභ්‍යාස පොතක මිල රුපියල් x ලෙස ගෙන x ඇතුළත් අසමානතාවක් ලියන්න.

(ii) අසමානතාව විසඳා පොතක අවම මිල සොයන්න.

(i) සරත් මිලදී ගත් පොත්වල මිල $=$ රු $5x$
සරත් වියදම් කළ මුදල $=$ රු $5x + 30$
එලෙසම, කමනි වියදම් කළ මුදල $=$ රු $3x + 110$

දී ඇති දත්ත අනුව,

$$5x + 30 \geq 3x + 110$$

මෙය අවශ්‍ය අසමානතාවයි.

(ii) $5x + 30 \geq 3x + 110$

$5x + 30 - 30 \geq 3x + 110 - 30$

$$5x \geq 3x + 80$$
$$5x - 3x \geq 3x + 80 - 3x$$
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{80}{2}$$
$$x \geq 40$$

$\therefore$ අභ්‍යාස පොතක අවම මිල රුපියල් 40 වේ.

20.2 අභ්‍යාසය

1. කුඩා ට්‍රැක්ටරයක එකක් 50 kg බැගින් වූ සිමෙන්ති කොට්ට 5ක් සහ සමාන බරැති කම්බිකූරු 30ක් පටවා ඇත. ට්‍රැක්ටරයේ ගෙන යා හැකි උපරිම බර ප්‍රමාණය 700 kg කි.

(i) කම්බි කූරක බර x kg ලෙස ගෙන ඉහත තොරතුරු ඇසුරෙන් අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.
(ii) කම්බිකූරක උපරිම බර සොයන්න.

2. A නම් පෙට්ටියක කුඩා බිස්කට් පැකට් 12ක් සහ 200g වූ බිස්කට් පැකට් 5ක් ද, B නම් පෙට්ටියක කුඩා බිස්කට් පැකට් 4ක් සහ 200g බිස්කට් පැකට් 9ක් ද අසුරා ඇත. A පෙට්ටියේ ඇති බිස්කට්වල බර, B පෙට්ටියේ ඇති බිස්කට්වල බරට වඩා අඩු හෝ සමාන වේ.

(i) කුඩා බිස්කට් පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම් x ලෙස ගෙන, දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු අසමානතාවක් ලියන්න.
(ii) කුඩා බිස්කට් පැකට්ටුවක උපරිම බර සොයන්න.

3. වැඩපොලක පුහුණු සහ නොපුහුණු කම්කරුවෝ සේවය කරති. පුහුණු කම්කරුවකුගේ දිනක වැටුප රුපියල් 1200කි. පුහුණු කම්කරුවන් 5 දෙනෙකුගේ සහ නුපුහුණු කම්කරුවන් 7 දෙනෙකුගේ දිනක වැටුප් සඳහා වැයවන මුදල පුහුණු කම්කරුවන් 7 දෙනෙකුගේ සහ නුපුහුණු කම්කරුවන් 4 දෙනෙකුගේ වැටුපට සමාන හෝ විශාල වේ.

(i) නුපුහුණු කම්කරුවකුගේ දිනක වැටුප රුපියල් x ලෙස ගෙන, ඉහත තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.
(ii) අසමානතාව විසඳා නුපුහුණු කම්කරුවෙකුගේ දිනක අවම වැටුප සොයන්න.

4. බරින් සමාන තේ පැකට් 5ක් සහ සීනි කිලෝග්‍රෑම් 3ක මුළු බර, තේ පැකට් 25ක බරට වඩා වැඩි හෝ සමාන වේ. මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් අසමානතාවක් ගොඩනගා තේ පැකැට්ටුවක අවම බර සොයන්න.

5. කාමර දෙකක පිඟන් ගඩොල් ඇතිරීම සඳහා ප්‍රමාණ දෙකක සමචතුරස්‍රාකාර පිඟන් ගඩොල් භාවිත කෙරෙයි. විශාල පිඟන් ගඩොලක වර්ගඵලය $900\ cm^2$ වේ.

A කාමරයේ ඇතිරීම සඳහා කුඩා පිඟන් ගඩොල් 100ක් සහ විශාල පිඟන් ගඩොල් 10 ක් ද, *B* කාමරය සඳහා කුඩා පිඟන් ගඩොල් 20ක් සහ විශාල පිඟන් ගඩොල් 30ක් ද අවශ්‍ය වේ. *B* කාමරයේ ගෙබිමේ වර්ගඵලය *A* කාමරයේ ගෙබිමේ වර්ගඵලයට විශාල හෝ සමාන නම්, අසමානතාවක් ඇසුරෙන් කුඩා පිඟන් ගඩොලක උපරිම පැත්තක දිග සොයන්න.

6. ටැංකියකට $5l$ ධාරිතාවක් ඇති විශාල බාල්දියකින් සහ තවත් කුඩා බාල්දියකින් වතුර පුර වනු ලැබේ. සම්පූර්ණයෙන් පුරවන ලද විශාල බාල්දියෙන් 12 වතාවක් ද සම්පූර්ණයෙන් ම පිරවූ කුඩා බාල්දියෙන් 4 වතාවක් ද වතුර දැමූවිට ටැංකිය සම්පූර්ණයෙන් පිරේ. විශාල බාල්දියෙන් 9 වතාවක් සහ කුඩා බාල්දියෙන් 9 වතාවක් වතුර දැමූවිට ටැංකිය උතුරා නොයයි. අසමානතාවක් ඇසුරෙන් කුඩා බාල්දියේ උපරිම ධාරිතාව ආසන්න ලීටරයට සොයන්න.

21 වෘත්ත චතුරස්‍ර

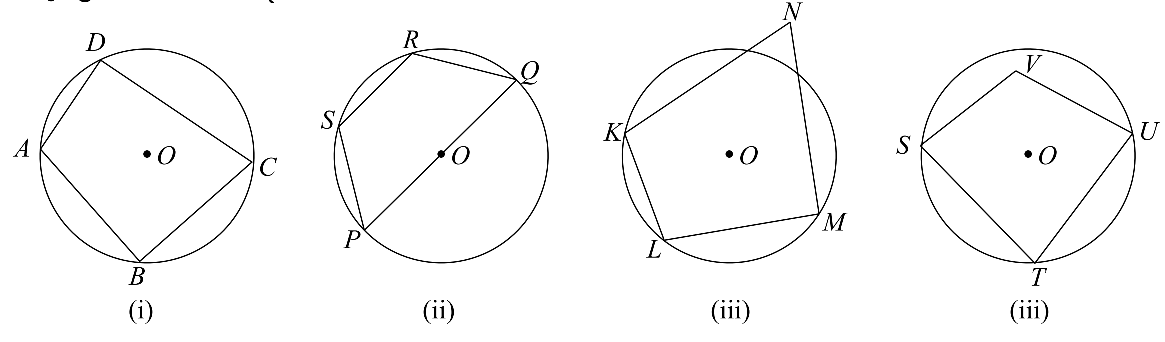
මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- වෘත්ත චතුරස්‍ර හඳුනා ගැනීමට හා වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය හඳුනා ගැනීමට
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

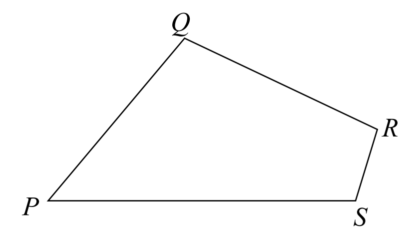
21.1 වෘත්ත චතුරස්‍ර

චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ හතර එකම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම චතුරස්‍රය **වෘත්ත චතුරස්‍රයක්** ලෙස හැඳින්වේ.



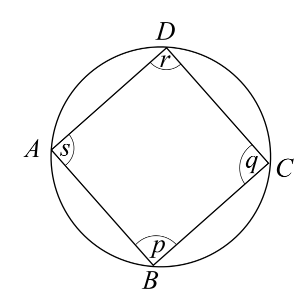
ඉහත රූපසටහන්වල දැක්වෙන පරිදි (i) හා (ii) රූප සටහන්වල දැක්වෙන $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර **වෘත්ත චතුරස්‍ර** බවත් (iii) හා (iv) රූප සටහන්වල දැක්වෙන චතුරස්‍ර **වෘත්ත චතුරස්‍ර නොවන** බවත් පැහැදිලි ය.

චතුරස්‍රයක යම් කෝණයකට සම්මුඛ කෝණය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ඊට ඉදිරියෙන් ඇති කෝණයයි. නිදසුනක් ලෙස, පහත දැක්වෙන $PQRS$ චතුරස්‍රයේ $\hat{P}$ ට සම්මුඛ කෝණය $\hat{R}$ ද $\hat{Q}$ ට සම්මුඛ කෝණය $\hat{S}$ ද වේ.



වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ අතර ඇති සම්බන්ධය පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි නිරත වීමෙන් අවබෝධ කර ගනිමු.

ක්‍රියාකාරකම



- රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ඇඳ ගන්න.
- වෘත්ත චතුරස්‍රයේ කෝණ කපා වෙන් කරගන්න.
- එම වෙන්කර ගත් කෝණ, p හා r මගින් දැක්වෙන කෝණ යුගලය බද්ධ පාද යුගලයක් වන සේ කඩදාසියක අලවාගෙන ඒවා පරිපූරක දැයි (එනම් කෝණවල එකතුව 180° දැයි) මැන බලන්න. q හා s කෝණ යුගලය සඳහා ද එය සිදු කරන්න.
- එමගින් වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පිළිබඳ ව ඔබට එළඹිය හැකි නිගමනය කුමක් ද?

$p + r = 180^{\circ}$ ද $q + s = 180^{\circ}$ වන බව ඔබට පැහැදිලිවනු ඇත. මෙම සම්බන්ධය පහත ආකාරයට ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

මෙම ප්‍රමේයය අනුව, ඉහත දී ඇති රූපය සැලකූ විට,

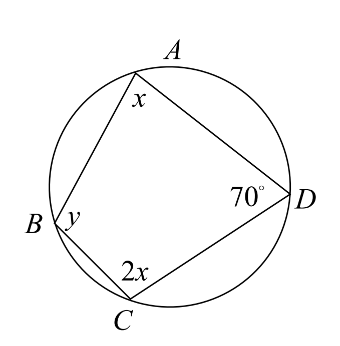
$A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180^{\circ}$ හා

$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^{\circ}$ ද වේ.

ඉහත සඳහන් කරන ලද ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් කරන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයෙහි x හා y හි අගය සොයන්න.



වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා

$70^{\circ} + y = 180^{\circ}$

$\therefore \; y = 180^{\circ} - 70^{\circ}$

$\underline{\underline{y = 110^{\circ}}}$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා

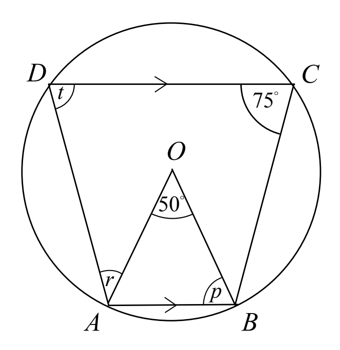
$x + 2x = 180^{\circ}$

$3x = 180^{\circ}$

$\therefore \; \underline{\underline{x = 60^{\circ}}}$

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ $AB//DC$ වේ. වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.



$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$ (OA හා OB එකම වෘත්තයේ අර නිසා සමාන වේ.)

$\therefore\ p + p + 50^\circ = 180^\circ$ (OAB ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$$\therefore p = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2}$$

$$= \underline{\underline{65^\circ}}$$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$75^\circ + D\hat{A}B = 180^\circ$$

$$D\hat{A}B = 180^\circ - 75^\circ$$

$$= 105^\circ$$

$$B\hat{A}O + O\hat{A}D = 105^\circ$$

$$\therefore\ 65^\circ + r = 105^\circ$$

$$r = 105^\circ - 65^\circ$$

$$r = \underline{\underline{40^\circ}}$$

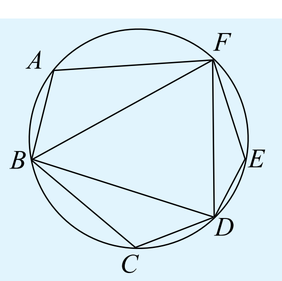
මිත්‍ර කෝණ යුගලයක එකතුව 180° නිසා

$$t + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore\ t = 180^\circ - 105^\circ$$

$$t = \underline{\underline{75^\circ}}$$

21.1 අභ්‍යාසය

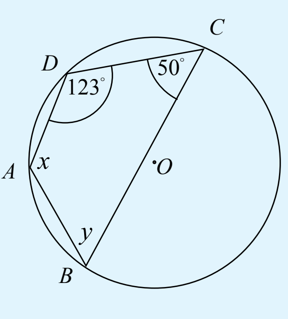


1. (i) රූපයේ ඇති වෘත්ත චතුරස්‍ර සියල්ල ලියා දක්වන්න.

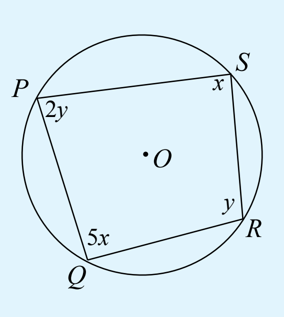
(ii) ඉහත නම් කරන ලද එක් එක් වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ යුගල දෙක ලියා දක්වන්න.

2. දී ඇති තොරතුරු උපයෝගී කරගෙන, සංකේත ඇසුරෙන් දැක්වෙන එක් එක් කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න. පහත දැක්වෙන රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාළ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

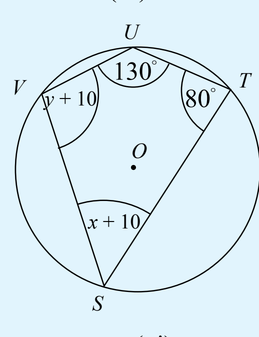
(i)



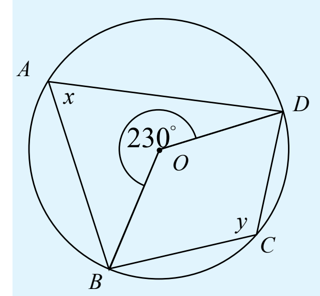
(ii)



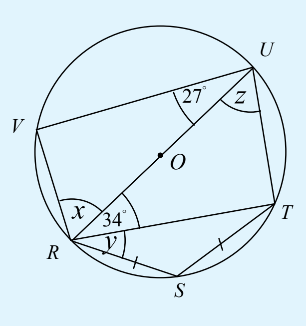
(iii)



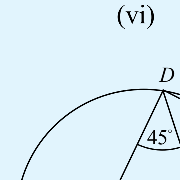
(iv)



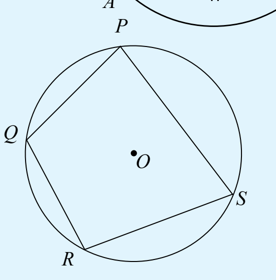
(v)



(vi)



3. රූපයේ දැක්වෙන්නේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකි.



a. $\hat{P} = 60^\circ, \hat{S} = 125^\circ$, නම් $\hat{R}$ හා $\hat{Q}$ හි අගය

b. $\hat{P} : \hat{R} = 2 : 3$ නම් $\hat{P}$ හා $\hat{R}$ හි අගය

c. $\hat{Q} - \hat{S} = 120^\circ$ නම් $\hat{S}$ හා $\hat{Q}$ හි අගය

d. $2\hat{P} = \hat{R}$ නම් $\hat{P}$ හි අගය

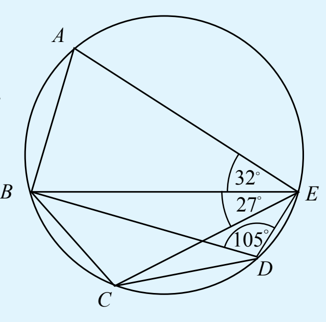
e. $\hat{P} = 2x + y, \hat{Q} = x + y; \hat{R} = 60^\circ$ හා $\hat{S} = 90^\circ$ නම් x හා y හි අගය

සොයන්න.

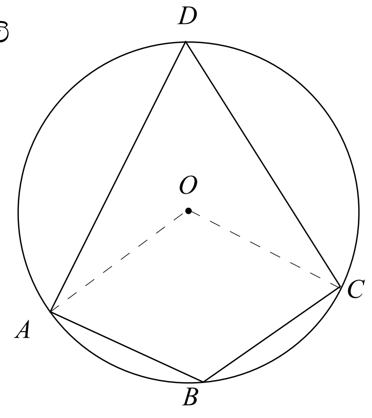
4. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ පරිධිය මත A, B, C, D, E හා F ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $F\hat{A}B + B\hat{C}D + D\hat{E}F$ හි අගය සොයන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ අගය සොයන්න.

a. $B\hat{A}E$ **b.** $C\hat{B}A$ **c.** $C\hat{B}E$



ඉහත සඳහන් කරන ලද "වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ" යන ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු අපි විමසා බලමු.



දත්තය: $ABCD$ යනු O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තය මත පිහිටි වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ සහ

$D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$ බව

නිර්මාණය: OA හා OC යා කිරීම

සාධනය:

$A\hat{O}C = 2\,A\hat{D}C$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි)

$A\hat{O}C$ (පරාවර්තිත) $= 2\,A\hat{B}C$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි)

$\therefore$ $A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C$

නමුත්, $A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 360^\circ$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$\therefore$ $2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C = 360^\circ$

එවිට, $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^\circ$

මෙලෙසම, OB හා OD යා කර, $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$ බව පෙන්විය හැකි ය.

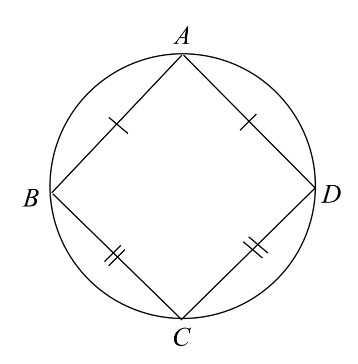
$\therefore$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ විලෝමය ද සත්‍ය වේ. එනම්, චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ දෙකක ඓක්‍යය 180° නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි. එය ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත ආකාරයට ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි.

ඉහත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

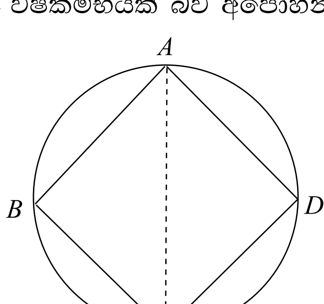
නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $AB = AD$ ද $CB = CD$ ද වේ.

(i) $ABC\Delta \equiv ACD\,\Delta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) AC විෂ්කම්භයක් බව අපෝහනය කරන්න.



(i) ABC හා ADC ත්‍රිකෝණ යුගලය සැලකූ විට

$AB = AD$ (දී ඇත)

$BC = DC$ (දී ඇත)

AC පොදු පාදය

$\therefore \; ABC\Delta \equiv ACD\,\Delta$ (පා. පා. පා.)

(ii) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ)

නමුත් $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ)

$\therefore \; A\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^\circ$

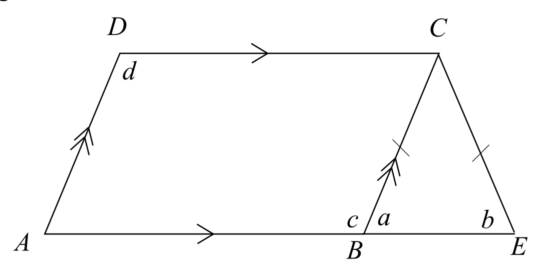
$\therefore \; 2\,A\hat{B}C = 180^\circ$

$\therefore \; A\hat{B}C = 90^\circ$

$\therefore \; AC$ විෂ්කම්භය වේ. (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය 90° බැවින්)

නිදසුන 2

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ $CB = CE$ වන සේ AB පාදය E තෙක් දික්කර ඇත. $AECD$ චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



$a = b$ ($CE = CB$ නිසා)

$c = 180^\circ - a$ (සරල කෝණ)

$c = 180^\circ - b$ ($a = b$ නිසා) ——— ①

$c = d$ ($ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ) ——— ②

① හා ② ඇසුරෙන්

$d = 180^\circ - b$

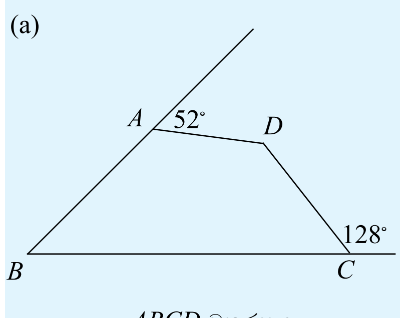
$\therefore b + d = 180^\circ$

$AECD$ චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ යුගලයේ එකතුව 180° බැවින් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

21.2 අභ්‍යාසය

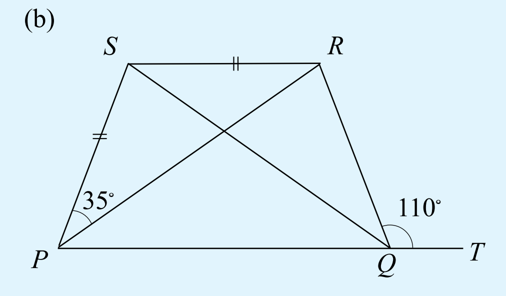
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවන් හි සඳහන් කර ඇති චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ ද නොවේ ද යන්න හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

(a)



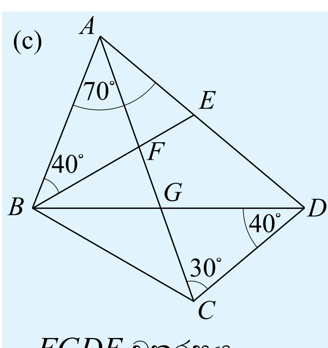
$ABCD$ චතුරස්‍රය

(b)



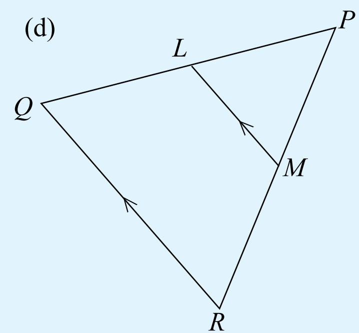
$PQRS$ චතුරස්‍රය

(c)



FGDE චතුරස්‍රය

(d)



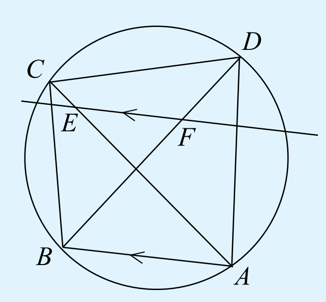
$PQ = PR$ නම් *QRML* චතුරස්‍රය

2. *PQRS* චතුරස්‍රයේ $\hat{P} = \hat{Q}$ ද $\hat{R} = \hat{S}$ ද වේ. *PQRS* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

3. *ABCD* වෘත්ත චතුරස්‍රයේ *AC* යා කර ඇත. $B\hat{A}C = A\hat{D}C - A\hat{C}B$ බව පෙන්වන්න.

4. *ABCD* චතුරස්‍රයේ $A\hat{B}D + A\hat{D}B = D\hat{C}B$ වේ නම් *A, B, C* හා *D* ලක්ෂ්‍ය එකම වෘත්තයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

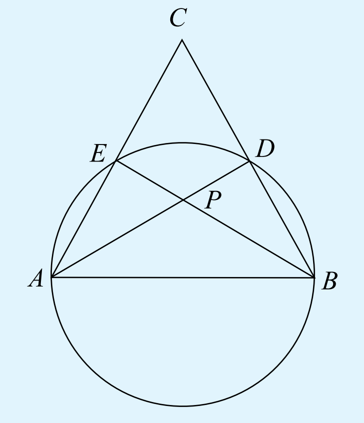
5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් *CDFE* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



6. දී ඇති රූපයේ *AB* විෂ්කම්භයක් වේ නම්

(i) $A\hat{P}B = C\hat{A}B + A\hat{B}C$ බව පෙන්වන්න.

(ii) *CDPE* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

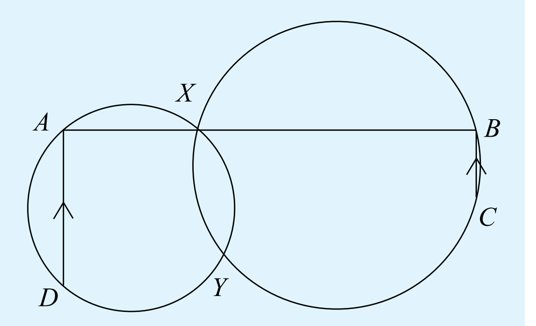


7. PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ පාදය S දක්වා ද, PR පාදය T දක්වා ද දික්කර ඇත. $S\hat{Q}R$ හා $Q\hat{R}T$ කෝණවල සමච්ඡේදක X හි දී ද, $P\hat{Q}R$ හා $P\hat{R}Q$ කෝණවල සමච්ඡේදක Y හි දී ද එකනෙක හමු වේ.

(i) $QXRY$ යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත් XY යනු විශ්කම්භයක් බවත් පෙන්වන්න.

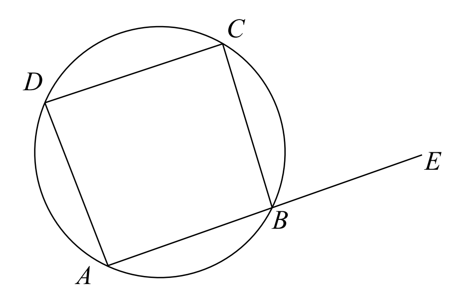
(ii) $Q\hat{P}R = 40^\circ$ නම් $Q\hat{X}R$ හි අගය සොයන්න.

8. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වෘත්ත දෙකක් X හා Y හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. X හරහා ඇඳි සරල රේඛාව A හා B හි දී වෘත්ත දෙක හමු වේ. D හා C ලක්ෂ්‍ය වෘත්ත දෙක මත පිහිටා ඇත්තේ AD හා BC සමාන්තර වන පරිදි නම් D, Y හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව සාධනය කරන්න.

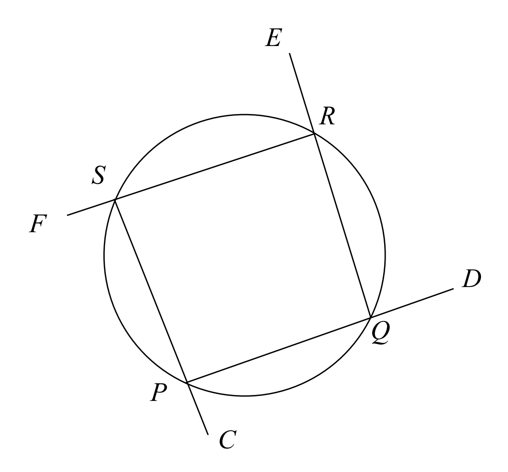


21.3 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ AB පාදය E තෙක් දික්කර ඇත.



එවිට, $C\hat{B}E$ යන්න වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණයක් වේ. ඊට අදාළ අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය $A\hat{D}C$ වේ.

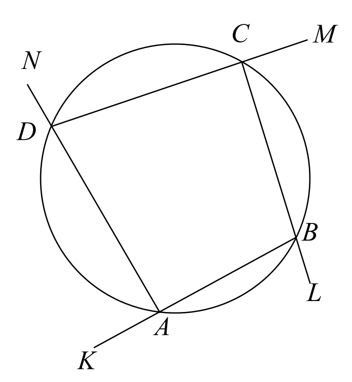


ඉහත රූපයේ දක්වා ඇති $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රය සැලකූ විට පහත වගුව සම්පූර්ණ කළ හැකි ය.

දික්කළ පාදය	බාහිර කෝණය	අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය
PQ	$D\hat{Q}R$	$P\hat{S}R$
QR	$E\hat{R}S$	$Q\hat{P}S$
RS	$F\hat{S}P$	$P\hat{Q}R$
SP	$Q\hat{P}C$	$Q\hat{R}S$

වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණයක් හා ඊට අදාළ අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය අතර සම්බන්ධය පහත ප්‍රමේයයෙන් ප්‍රකාශ වේ.

ප්‍රමේයය:
වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.



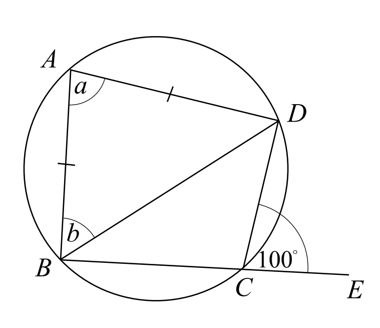
මෙම ප්‍රමේයයට අනුව, ඉහත රූප සටහනට අදාළ ව, පහත දැක්වෙන සමානතා පවතී.

$$D\hat{A}K = B\hat{C}D$$
$$A\hat{B}L = C\hat{D}A$$
$$B\hat{C}M = B\hat{A}D$$
$$C\hat{D}N = A\hat{B}C \text{ වේ.}$$

මෙම ප්‍රමේයය සත්‍යවන්නේ ඇයි දැයි යන්න විමසා බලමු. නිදසුනක් ලෙස, ඉහත රූපයේ, $D\hat{A}B$ හා $B\hat{C}M$ කෝණ සමාන වීමට හේතුව විමසා බලමු. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ වේ. එසේම, DCM සරල රේඛාවක් නිසා $D\hat{A}B + B\hat{C}D = B\hat{C}D + B\hat{C}M$. දෙපසින් ම $B\hat{C}D$ අවලංගු කළ විට, $D\hat{A}B = B\hat{C}M$ ලෙස ලැබේ.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන a හා b හි අගය සොයන්න.



වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$a = \underline{\underline{100^\circ}}$

$A\hat{D}B = b$ ($AB = AD$ නිසා)

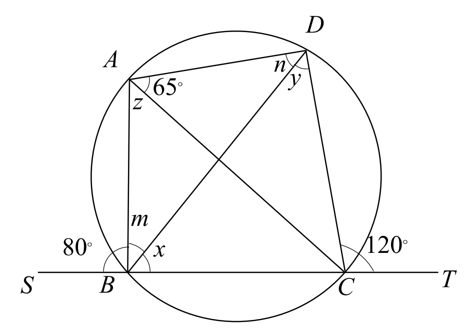
$a + b + b = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)

$100^\circ + 2b = 180^\circ$

$b = \underline{\underline{40^\circ}}$

නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන x, y, z, n හා m හි අගය සොයන්න.



$x = 65°$ (එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ)

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$$B\hat{A}D = D\hat{C}T$$

$$B\hat{A}D = 120°$$

$$z + 65° = 120°$$

$$z = 55°$$

$z = y$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$$\therefore \ y = \underline{\underline{55°}}$$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$$A\hat{D}C = A\hat{B}S = 80°$$

$$\therefore \ n + y = 80°$$

$$n + 55° = 80°$$

$$n = 80° - 55°$$

$$\therefore \ n = \underline{\underline{25°}}$$

$80° + m + x = 180°$ (සරල කෝණ)

$$80° + m + 65° = 180°$$

$$m = 180° - 145°$$

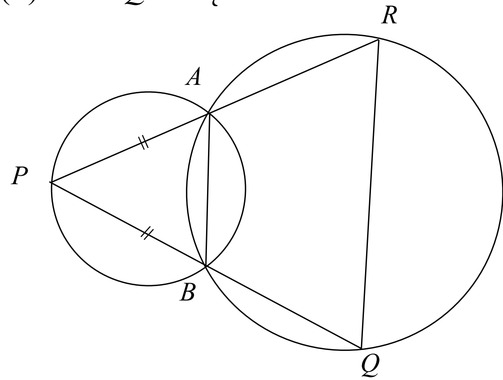
$$m = \underline{\underline{35°}}$$

නිදසුන 3

රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A හා B හි දී ඡේදනය වන අතර $PA = PB$ වේ. $A\hat{P}B = 70^\circ$ නම්,

(i) $A\hat{R}Q$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $AB//RQ$ වේ ද?



(i) APB ත්‍රිකෝණයේ

$P\hat{A}B = P\hat{B}A$ ($PA = PB$ නිසා)

$\therefore \; P\hat{A}B = P\hat{B}A = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

තව ද $A\hat{B}P = A\hat{R}Q$ ($ABQR$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

$\therefore \; A\hat{R}Q = \underline{\underline{55^\circ}}$

(ii) $P\hat{A}B = A\hat{R}Q = 55^\circ$ වේ.

$\therefore$ $AB//RQ$ වේ. (අනුරූප කෝණ සමාන වන නිසා)

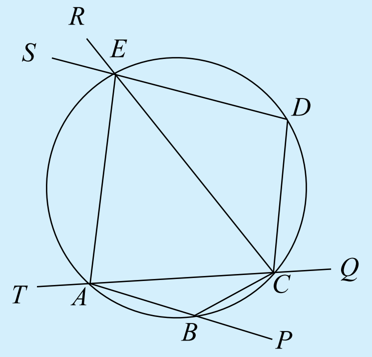
21.3 අභ්‍යාසය

1. රූපය ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝණයට සමාන වෙනත් කෝණයක් නම් කරන්න.



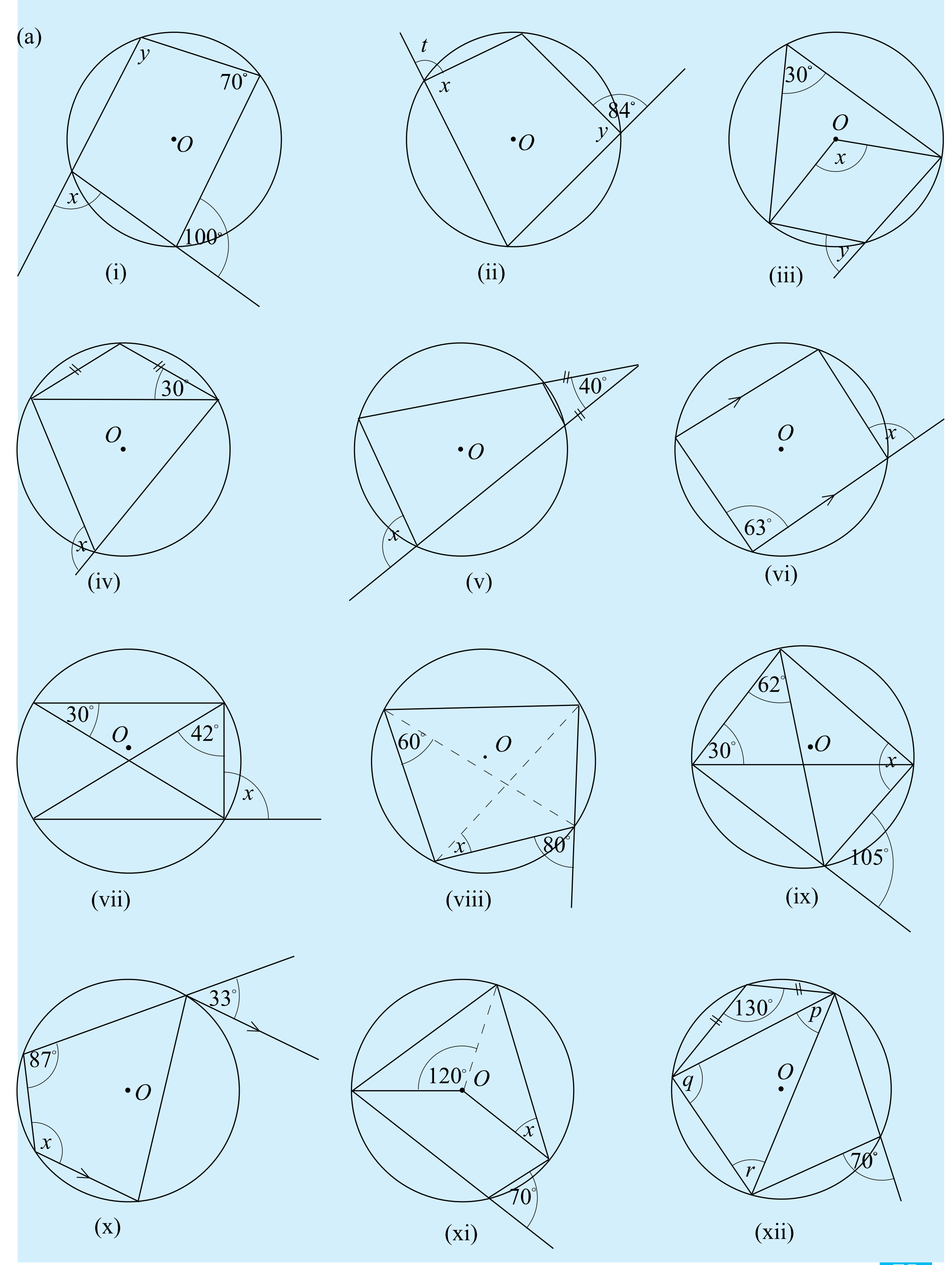
(i) $C\hat{B}P$ (ii) $D\hat{C}Q$ (iii) $R\hat{E}A$

(iv) $S\hat{E}A$ (v) $E\hat{A}T$



2. පහත දැක්වෙන රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාළ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි. වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

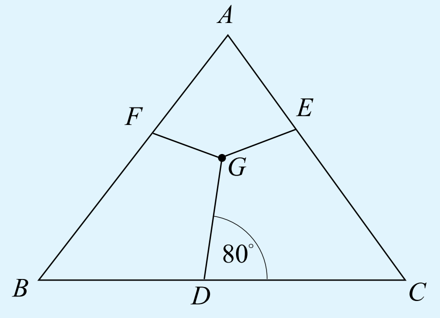
(a)



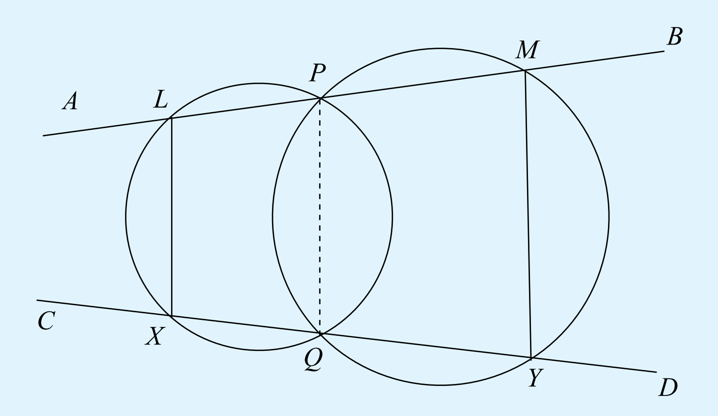
3. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදමත පිළිවෙළින් D, E, F ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $BDGF$ හා $DCEG$ වෘත්ත චතුරස්‍ර වන පරිදි හා $G\hat{D}C = 80^\circ$ වන පරිදි නම්

(i) $A\hat{F}G$ හා $A\hat{E}G$ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) $AFGE$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



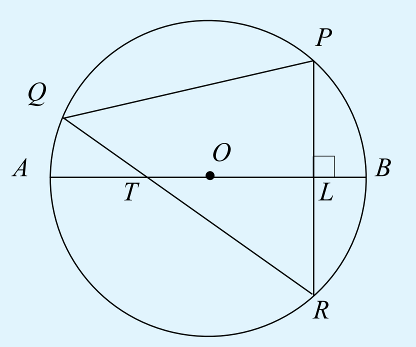
4. රූපයේ දී ඇති වෘත්ත P හා Q හි දී ඡේදනය වේ. APB හා CQD සරල රේඛා, වෘත්ත L, M හා X, Y වලදී පිළිවෙළින් හමුවේ.

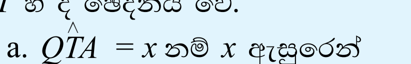


(i) $A\hat{L}X = 105^\circ$ නම් $B\hat{M}Y$ හි අගය සොයන්න.

(ii) LX හා MY සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වන අතර AB විෂ්කම්භය හා PR ජ්‍යාය එකිනෙක L හි දී ලම්බකව ඡේදනය වේ. QR හා AB රේඛා ඛණ්ඩ T හි දී ඡේදනය වේ.





a. $Q\hat{T}A = x$ නම් x ඇසුරෙන්

(i) $L\hat{R}T$ හි අගය

(ii) $O\hat{P}Q$ හි අගය

ලියන්න.

b. $QTOP$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

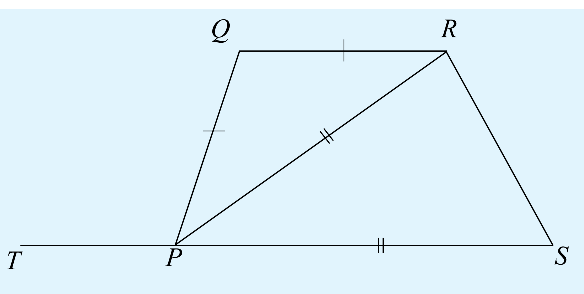
6. දී ඇති රූපයේ $PQ = QR$ ද $PR = PS$ ද වේ.

$P\hat{R}S = 2\,Q\hat{R}P$ නම්,

(i) $PSRQ$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව

(ii) $Q\hat{P}T : P\hat{R}S = 3 : 2$ බව

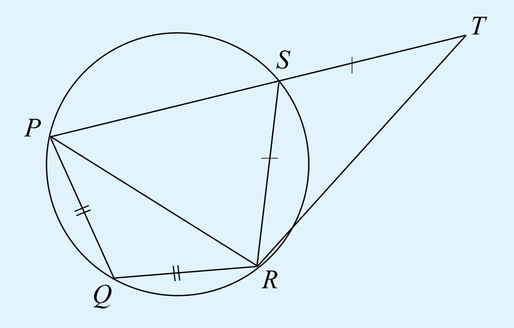
පෙන්වන්න.



7. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $PQ = QR$ වේ. $RS = ST$ වන පරිදි PS පාදය T දක්වා දික්කර ඇත. $S\hat{R}T = 32^{\circ}$ වේ නම්

(i) $Q\hat{R}P$ හි අගය සොයන්න.

(ii) QS හා RT පාද සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.



22

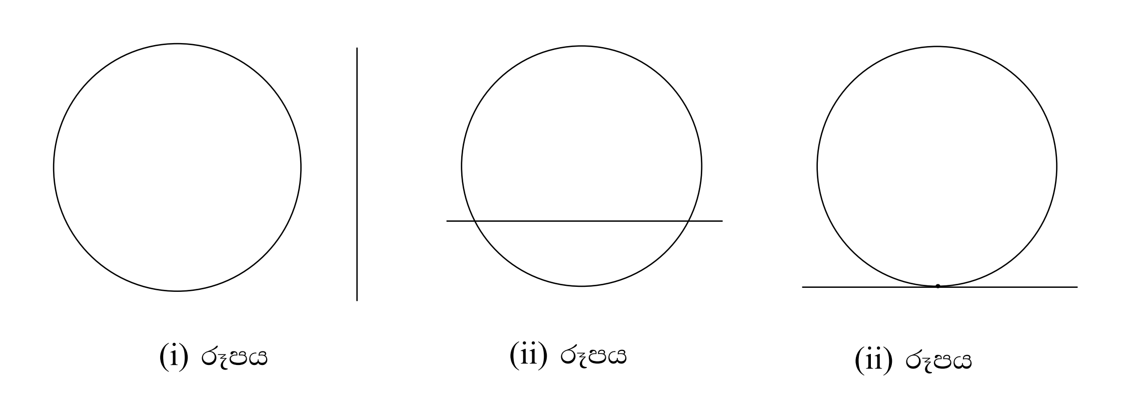
ස්පර්ශක

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ හඳුනා ගැනීමට හා ඒ සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

22.1 ස්පර්ශක



(i) රූපය (ii) රූපය (ii) රූපය

(i) රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට හා සරල රේඛාවට පොදු වූ ලක්ෂ්‍ය නොමැත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි.

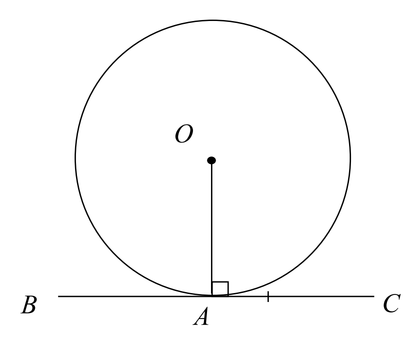
(ii) රූපයේ සරල රේඛාවෙන් වෘත්තය ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වේ. සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ ඡේදකයක් ලෙස හැඳින්වේ.

(iii) රූපයේ ඇති සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට එක් පොදු ලක්ෂ්‍යයක් පමණක් ඇත. මෙවිට සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි යැයි කියනු ලබන අතර එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ "**ස්පර්ශකයක්**" ලෙස හැඳින්වේ.

ස්පර්ශකයට හා වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍යය **ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය** ලෙස හැඳින්වේ.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බව අඳින ලද රේඛාව

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බ ව අඳින ලද රේඛාව පිළිබඳ ව කරුණු ඉගෙන ගැනීම සඳහා පහත කරුණු කෙරෙහි ඔබේ අවධානය යොමු කරන්න.



ඉහත රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය OA වේ. OAට ලම්බ වන පරිදි A හි දී ඇඳි ලම්බකය BC වේ. මෙහි BC රේඛාව වෘත්තය හමුවන්නේ A ලක්ෂ්‍යයේ දී පමණි. BC රේඛා ඛණ්ඩය A හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බව ද පැහැදිලි ය.

එනම්,

වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී OA අරයට ලම්බව A හි දී ඇඳි රේඛා ඛණ්ඩය වන BC මෙම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

තව ද, වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන සේ ම මෙහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ.

එනම්,

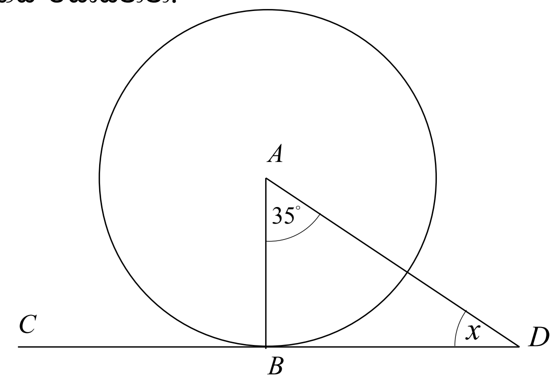
වෘත්තය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් ඇඳ, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී අරය ද ඇඳි විට, එම ස්පර්ශකය හා අරය එකිනෙක ලම්බ වේ.

එම ප්‍රතිඵලය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයයේ විලෝමය : වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයට ලම්බ වේ.

නිදසුන 1

කේන්ද්‍රය A වන වෘත්තයට ඒ මත පිහිටි B හි දී ඇඳි ස්පර්ශකය CD වේ. $B\hat{A}D = 35^{\circ}$ නම් x හි අගය සොයන්න.



$A\hat{B}D = 90^{\circ}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

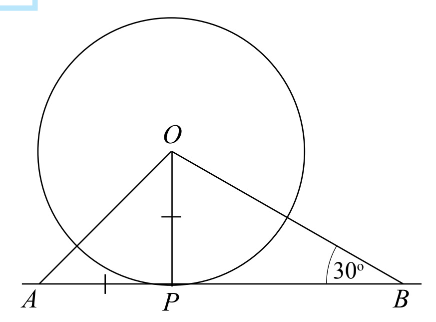
ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$35^{\circ} + 90^{\circ} + x = 180^{\circ}$$

$$x = 180^{\circ} - 35^{\circ} - 90^{\circ}$$

$$\underline{\underline{x = 55^{\circ}}}$$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $OP = AP$ සහ $O\hat{B}P = 30^{\circ}$ නම් $A\hat{O}B$ අගය සොයන්න.

$O\hat{P}A = 90^{\circ}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

$OP = AP$ (දී ඇත)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

APO ත්‍රිකෝණයෙහි,

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^{o}$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා)

$\therefore \; P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^{o} = 180^{o}$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^{o} - 90^{o}$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^{o}$

$\therefore \; 2\,P\hat{A}O = 90^{o}$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ නිසා)

$P\hat{A}O = \dfrac{90^{o}}{2}$

$= 45^{o}$

AOB ත්‍රිකෝණයෙහි,

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^{o}$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා)

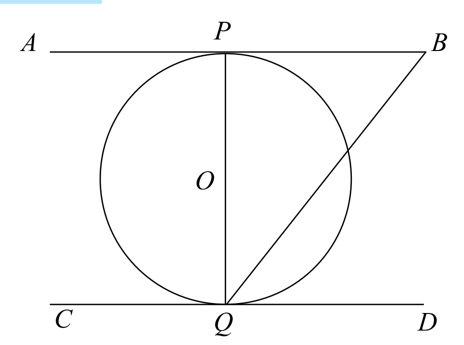
$A\hat{O}B + 45^{o} + 30^{o} = 180^{o}$

$A\hat{O}B + 75^{o} = 180^{o}$

$A\hat{O}B = 180^{o} - 75^{o}$

$= \underline{\underline{105^{o}}}$

නිදසුන 3



PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. වෘත්තයට P හා Q හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB සහ CD වේ. $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ බව පෙන්වන්න.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා,

$Q\hat{P}B = 90^{o}$ හා

$P\hat{Q}D = 90^{o}$ වේ.

$\therefore \; Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^{o} + 90^{o}$

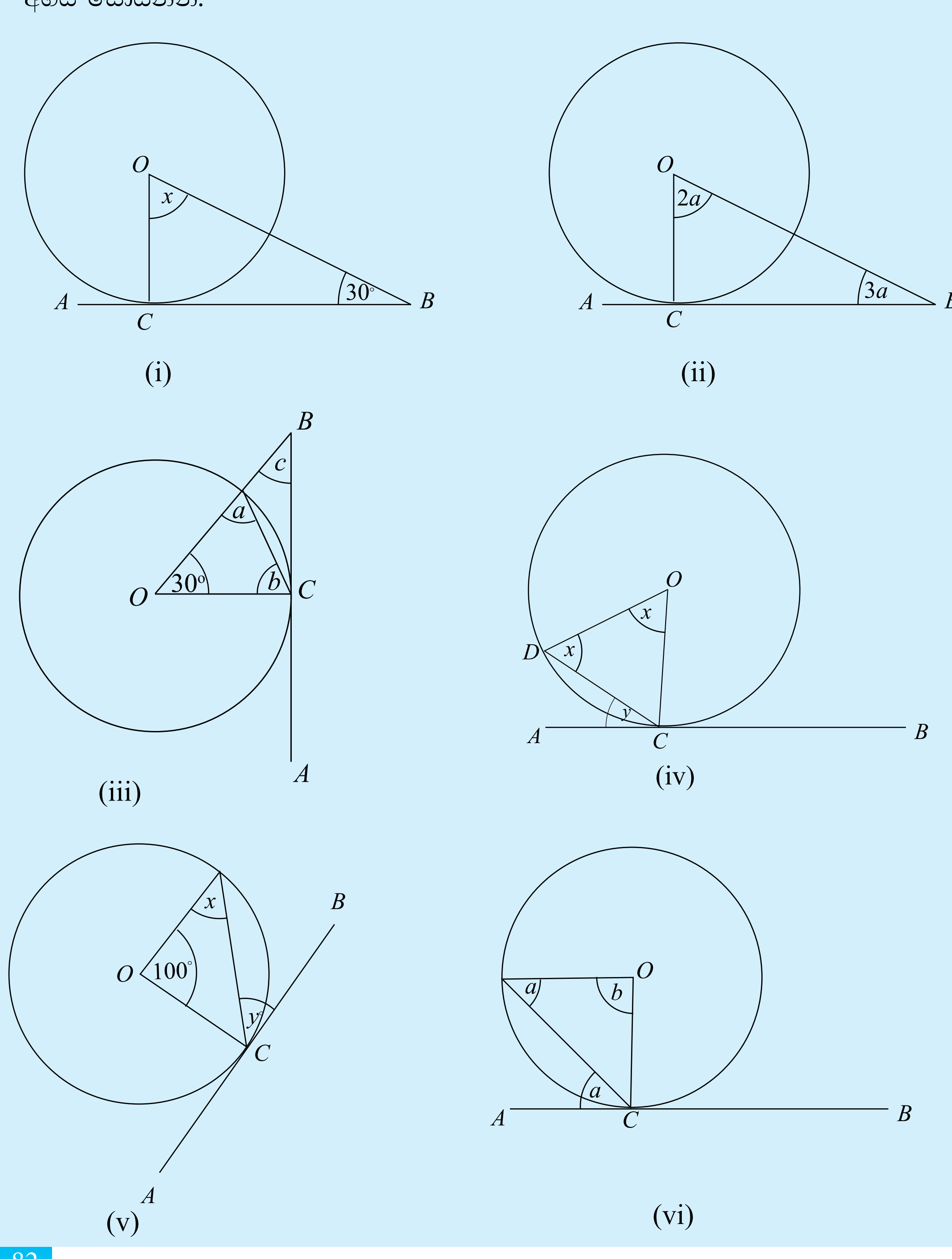
$= 180^{o}$

$\therefore \; AB \,//\, CD$ (මිත්‍රකෝණ පරිපූරක නිසා)

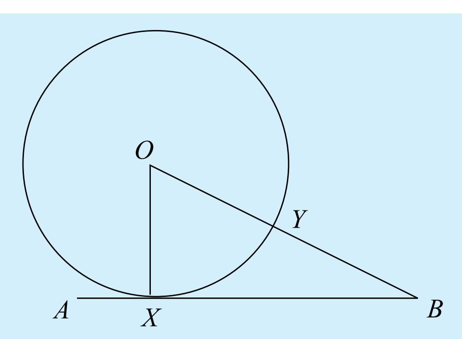
$\therefore \; P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ සහ ඒකාන්තර කෝණ)

22.1 අභ්‍යාසය

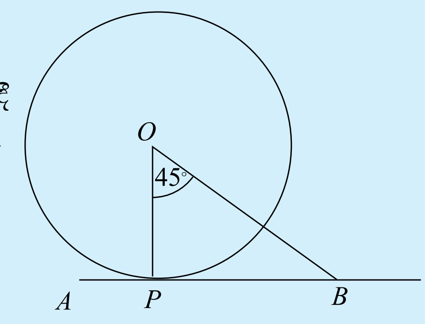
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ. දී ඇති දත්ත අනුව, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



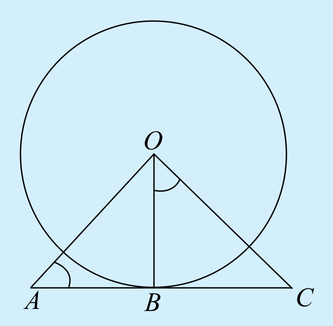
2. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. වෘත්තයේ අරය 6 cm ද $YB = 4$ cm ද නම් XB හි දිග සොයන්න.



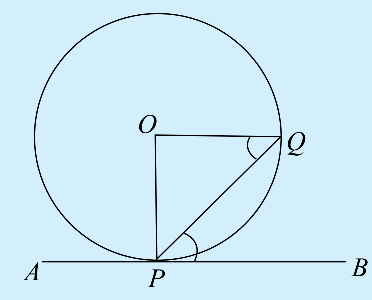
3. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB ද $B\hat{O}P = 45^\circ$ ද $PB = 6$ cm ද නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



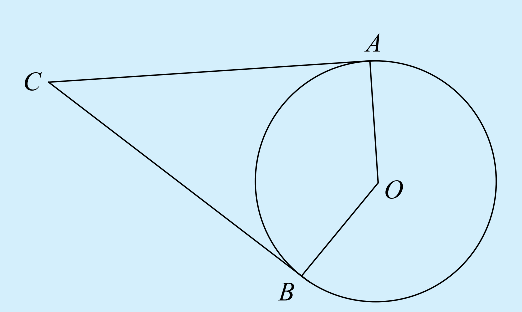
4. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට B හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AC වේ. $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ නම් $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ බව පෙන්වන්න.



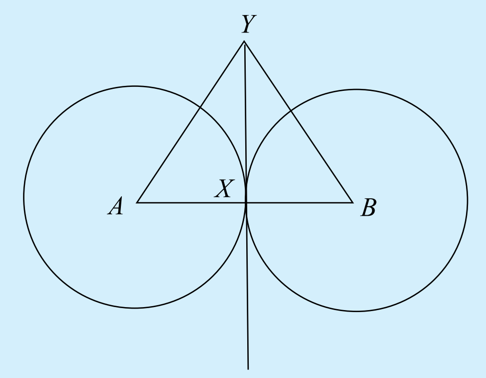
5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ වන ලෙස Q ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පිහිටයි. OQ හා PO එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.



6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක C ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. $AOBC$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන්නේ අර සමාන වූ ද කේන්ද්‍ර A හා B වූ ද වෘත්ත දෙකකි. Y ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $AY = YB$ වන පරිදි ය. YX රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.



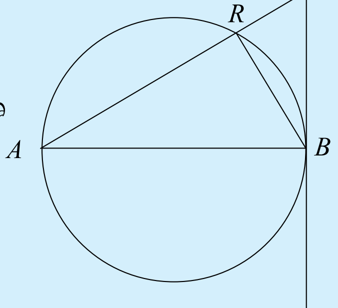
X

8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ AB විශ්කම්භයක් වන අතර PQ රේඛාව B ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $Q\hat{R}B = 90^\circ$ බව

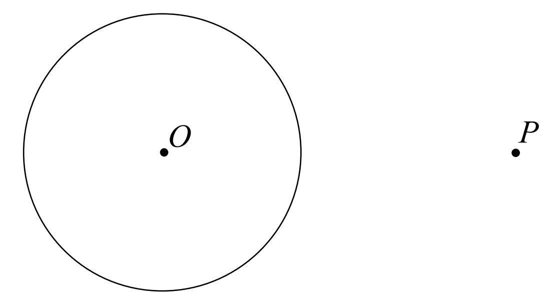
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ බව

පෙන්වන්න.

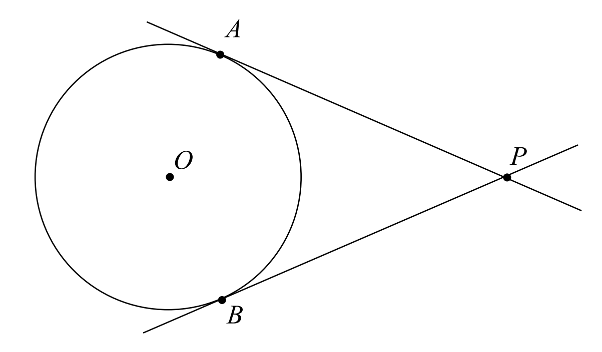


22.2 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු.

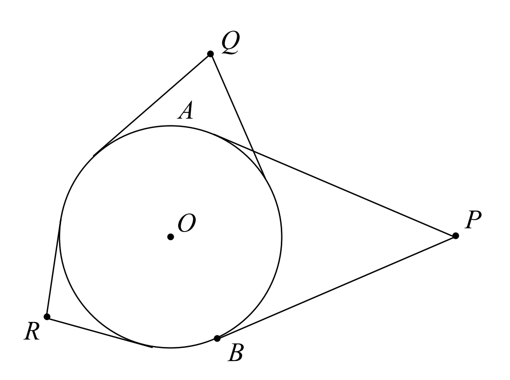


මෙම P ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරමින් වෘත්තය ස්පර්ශ කරන රේඛා දෙකක් ඇඳිය හැකි ය. එසේ ඇඳ ඇති රේඛා දෙක පහත රූපයේ දැක්වේ.



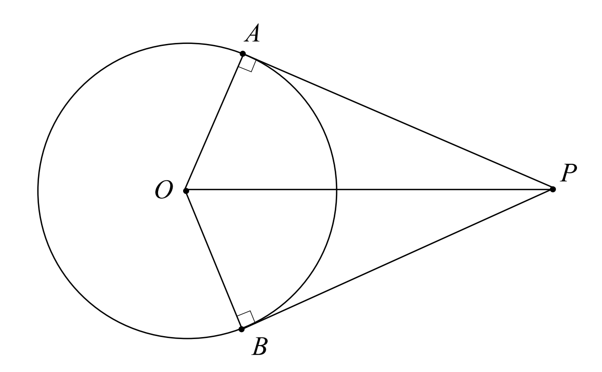
මෙම ස්පර්ශක දෙකට, P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක යැයි කියනු ලැබේ.

P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් කොතැනක පිහිටියත් මෙවැනි ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි බව අවබෝධ කර ගන්න. පහත රූපයේ දැක්වෙන්නේ P, Q හා R ලක්ෂ්‍ය තුනක් හරහා ඇඳ ඇති ස්පර්ශක යුගල තුනකි.



බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට මෙසේ ස්පර්ශක යුගලක් ඇඳි විට ලැබෙන රූපයෙහි ජ්‍යාමිතික ලක්ෂණ පිළිබඳ ව දැන් විමසා බලමු.

ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍ය දෙක A හා B ලෙස ලකුණු කොට, OA හා OB අරත්, OP රේඛා ඛණ්ඩයත් අඳිමු.



ඉහත 22.1 කොටසේ දී උගත් පරිදි, ස්පර්ශකය හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය එකිනෙකට ලම්බ නිසා ඒ බව රූපයේ ලකුණු කොට ඇත.

මෙම රූපයේ ඇති OAP හා OBP ත්‍රිකෝණ දෙක දෙස බැලූ සැනින්, සමමිතිය අනුව, ඒවා අංගසම බව අපට අනුමාන කළ හැකි ය. ඇත්ත වශයෙන් ම ඒවා අංගසම වේ. ඒ බව පහසුවෙන් සාධනය කළ හැකි ය. එම සාධනය කරන ආකාරය පිළිබඳ වැටහීමක් ලබා ගනිමු. ඒ සඳහා, එම ත්‍රිකෝණ දෙක ම සෘජුකෝණික බව පළමු ව නිරීක්ෂණය කරන්න. ඒ අනුව, එක් ත්‍රිකෝණයක කර්ණය හා තවත් පාදයක්, අනෙක් ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයට හා තවත් පාදයකට සමාන බව පෙන්වීමෙන්, කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ එම සාධනය සිදු කළ හැකි ය. ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි ම කර්ණය වන්නේ OP පොදු පාදයයි. තව ද OA හා OB අර නිසා එම පාද ද සමාන වේ. මේ අනුව ත්‍රිකෝණ දෙක කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වේ. එසේ අංගසම වූ පසු, අනුරූප අංග සමාන වන නිසා,

(i) $AP = BP$ වේ; එනම් ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ වේ; එනම් මගින් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේද වේ.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ වේ; එනම් ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයෙහි සමාන කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

මෙම සාකච්ඡා කළ කරුණු, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

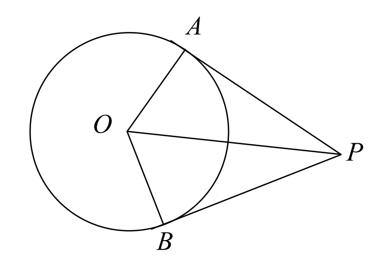
ප්‍රමේයය : බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්.

(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.

(iii) ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AP සහ BP වේ.

සාධනය කළ යුත්ත :

(i) $AP = BP$ බව

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ බව

(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$ බව

සාධනය : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ (ස්පර්ශක අරයට ලම්බ වන නිසා)

$\therefore$ POA සහ POB ත්‍රිකෝණ. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.

දැන් POA සහ POB ත්‍රිකෝණවල

$OA = OB$ (එකම වෘත්තයේ අර)

OP පොදු පාදය

$\therefore$ $POA\,\Delta \equiv POB\Delta$ (කර්ණ පා.)

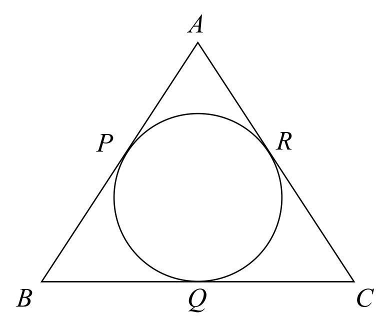
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ පාද P, Q සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී ස්පර්ශ කෙරේ. $AB = 11$ cm සහ $CR = 4$ cm නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.

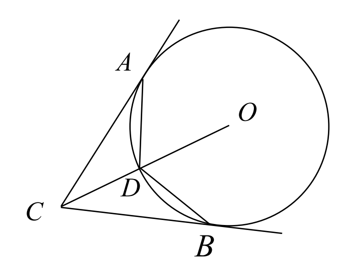
$$\therefore\ AP = AR$$
$$BP = BQ$$
$$CR = CQ$$

ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය $= AB + BC + CA$

$$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$$
$$= 11 + (BP + CR) + (CR + AP)$$
$$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$$
$$= 19 + (BP + AP)$$
$$= 19 + AB$$
$$= 19 + 11$$
$$= 30$$

$\therefore$ ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

නිදසුන 2

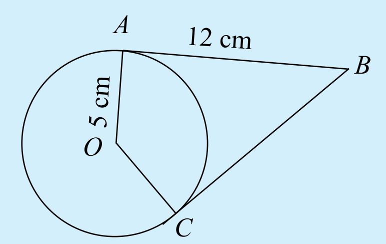


රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට බාහිරින් පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශක A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කෙරේ. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන O සහ C යා කෙරෙන සරල රේඛාව D හිදී වෘත්තය ඡේදනය කෙරේ. $AD = BD$ බව පෙන්වන්න.

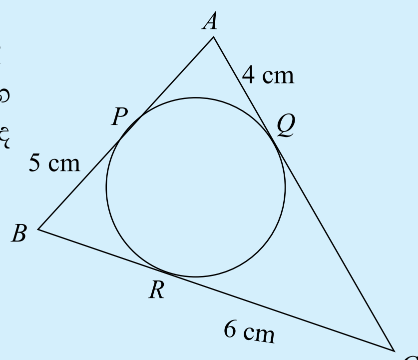
ACD හා BCD ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම කිරීමෙන් අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය සාධනය කළ හැකි ය.
ACD සහ BCD ත්‍රිකෝණවල
$AC = BC$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)
$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් බාහිර ලක්ෂ්‍යයත් කේන්ද්‍රයත් යා කරන සරල රේඛාවෙන් ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ)
CD පොදු පාදය
$\therefore \; ACD\Delta \equiv BCD\Delta$ (පා.කෝ.පා.)
$\therefore \; \underline{\underline{AD = BD}}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමාන නිසා)

22.2 අභ්‍යාසය

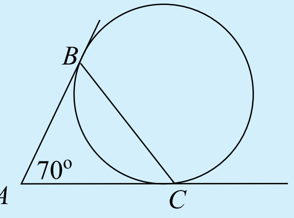
1. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක B හි දී හමු වේ. වෘත්තයේ අරය 5 cm ද AB = 12 cm ද නම් $ABCO$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB, AC සහ BC වේ. RC = 6 cm ද BP = 5 cm ද AQ = 4 cm ද නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

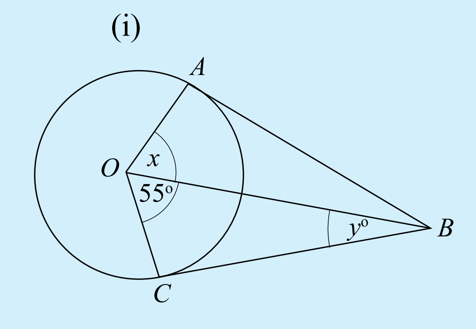


3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි B සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක A හි දී ඡේදනය වේ. $B\hat{A}C = 70^\circ$ නම් $A\hat{B}C$ හි අගය සොයන්න.

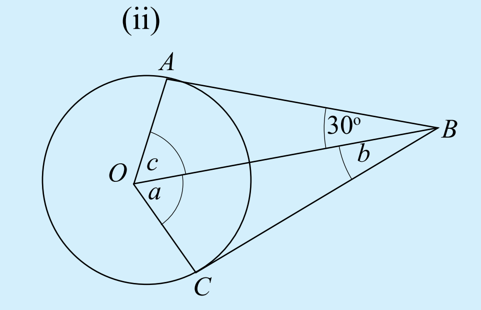


4. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද වෘත්ත මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක හමුවන ලක්ෂ්‍ය B ද වේ. දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන්, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

(i)



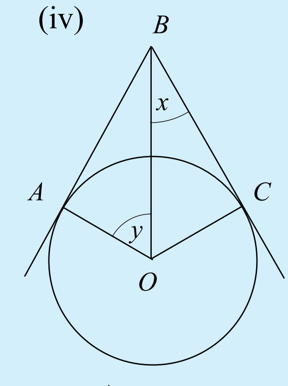
(ii)



(iii)

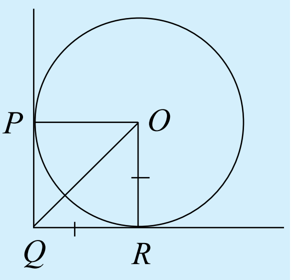
$A\hat{B}C = 70^\circ$

(iv)

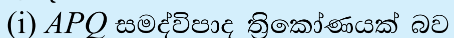


$A\hat{O}C = 110^\circ$

5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක Q හිදී හමුවේ. $QR = OR$ නම්, $PQRO$ යන්න සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



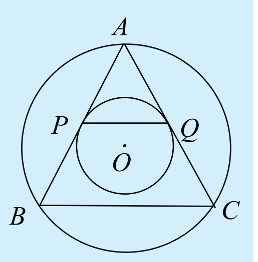
6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ විශාල වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. වෘත්තය තුළ පිහිටි කුඩා වෘත්තය P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී AB හා AC ස්පර්ශ කරයි.



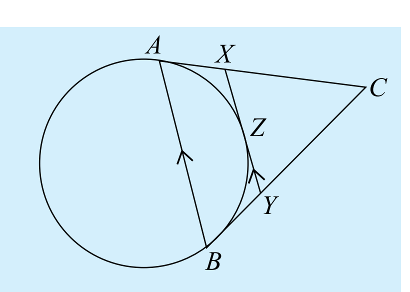
(i) APQ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

(ii) $BC \parallel PQ$ බව

පෙන්වන්න.



7. දී ඇති වෘත්තයට A, B හා Z හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AC, BC හා XY වේ. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $XC = CY$ බව පෙන්වන්න.



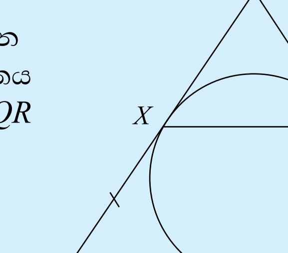
8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට P සිට අඳින ලද ස්පර්ශක X හා Y ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $XQ = YR$ වන සේ අඳින ලද QR සරල රේඛාව Z හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PR = PQ$ බව

(ii) $QR = XQ + YR$ බව

(iii) $XY \parallel QR$ බව

පෙන්වන්න.



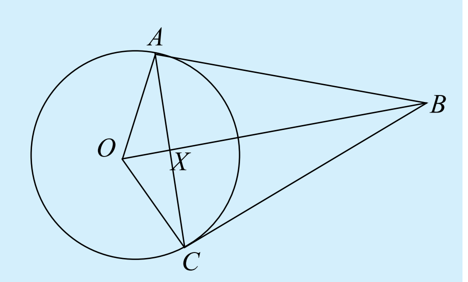
9. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක B හිදී එකිනෙක හමුවේ.

(i) $OAX\,\Delta \equiv OCX\,\Delta$ බව

(ii) OB රේඛාව AC රේඛාවේ ලම්බ සමච්ඡේදකය බව

(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ බව

පෙන්වන්න.

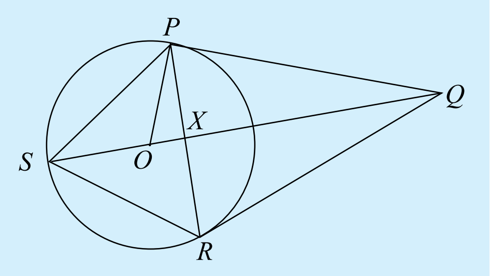


10. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට Q සිට ඇඳි ස්පර්ශක PQ සහ QR වේ. දික් කරන ලද QO රේඛාවට S හි දී වෘත්තය හමුවේ.

(i) $PQS\,\Delta \equiv QRS\,\Delta$ බව

(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ බව

පෙන්වන්න.

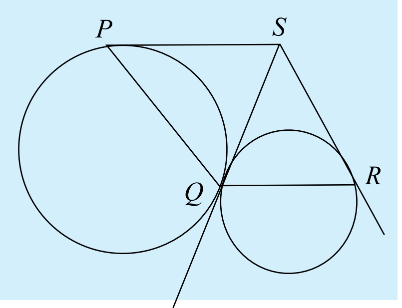


11. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකම මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන අතර QS රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වේ. S සිට වෘත්ත දෙකට අඳින ලද අනෙක් ස්පර්ශක දෙක P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PS = SR$ බව

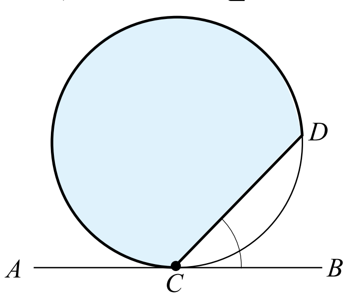
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ බව

පෙන්වන්න.



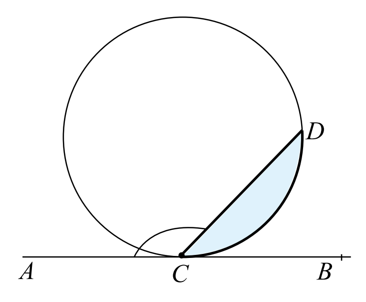
22.3 ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ

මුලින් ම ඒකාන්තර ඛණ්ඩය යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි විමසා බලමු. ඒ සඳහා පහත රූප සටහන වෙත අවධානය යොමු කරන්න.



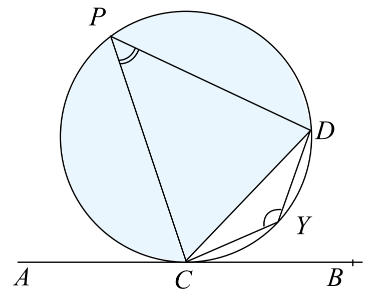
රූප සටහනේ දක්වා ඇති පරිදි AB සරල රේඛාව C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. CD ජ්‍යායකි. CD ජ්‍යායෙන්, වෘත්තය, වෘත්ත ඛණ්ඩ දෙකකට වෙන් වේ. එක් ඛණ්ඩයක් වන්නේ රූපයේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට දක්වා ඇති කොටසයි. අනෙක් ඛණ්ඩය වන්නේ එසේ අඳුරු නොකළ කුඩා කොටසයි. AB ස්පර්ශක මත CD ජ්‍යායෙන් කෝණ දෙකක් සාදයි. එක් කෝණයක් $A\hat{C}D$ ය. අනෙක $B\hat{C}D$ ය. BCD කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට ඇති වෘත්ත ඛණ්ඩයයි. එසේ ම, $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ අඳුරු නොකළ අනෙක් වෘත්ත ඛණ්ඩයයි.

පහත දැක්වෙන රූප සටහනේ $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කර දක්වා ඇත.



ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ ආශ්‍රිත ප්‍රමේයය

පහත දැක්වෙන රූපය දෙස බලන්න. $C\hat{P}D$ පිහිටා තිබෙන්නේ ලා නිල් පැහැති විශාල වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ය. එනම් $C\hat{P}D$ හා $D\hat{C}B$ කෝණ එකිනෙක ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි. එසේ ම, $C\hat{Y}D$ හා $A\hat{C}D$ කෝණ ද එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි.

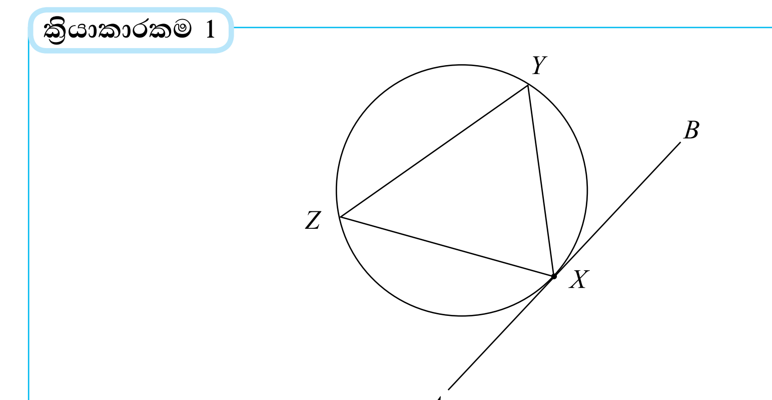


වෘත්තයක ස්පර්ශක සම්බන්ධ ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ඇත. එම ප්‍රතිඵලයෙන් කියවෙන්නේ, ඉහත රූපය අනුව $D\hat{C}B$ හා $C\hat{P}D$ කෝණය සමාන බවත් $A\hat{C}D$ කෝණය හා $C\hat{Y}D$ කෝණය සමාන බවත් ය. වෙනත් අයුරකින් කිවහොත් "වෘත්තයක ස්පර්ශකයක් හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයට (එනම් එම ජ්‍යායෙන්, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ආපාතික කෝණයට) සමාන වේ". මෙම ප්‍රතිඵලය ඉතා වැදගත් නිසා එය ප්‍රමේයයක් ලෙස ප්‍රකාශ කොට සිහි තබා ගනිමු.

ප්‍රමේයය : වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ සත්‍යතාව තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදෙන්න.

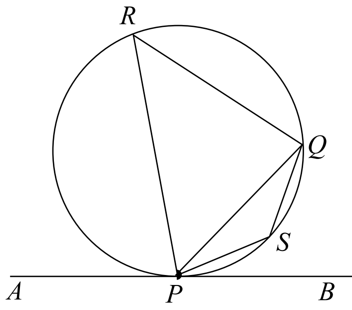
ක්‍රියාකාරකම 1



- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය X ලෙස නම් කරන්න.

- X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (X හි දී වෘත්තයට අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව X හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- වෘත්තය මත තවත් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර එම ලක්ෂ්‍ය Y සහ Z ලෙස නම් කරන්න.
- X, Y හා Z ලක්ෂ්‍ය රූපයේ පරිදි යා කරන්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{X}Y$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Z}Y$ හි අගයන් මැන සොයා, ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එසේම $A\hat{X}Z$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Y}Z$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

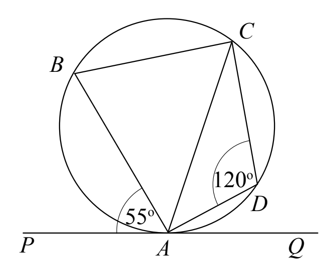
ක්‍රියාකාරකම 2



- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය P ලෙස නම් කරන්න. P ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (P හි දී අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව P හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ජ්‍යායක් ඇඳ එය PQ ලෙස නම් කරන්න.
- PQ ජ්‍යාය දෙපස පිහිටන ලෙස වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර ඒවා R හා S ලෙස නම් කරන්න.
- QR, QS, PS හා PR රේඛා ඛණ්ඩ අඳින්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{P}Q$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{R}Q$ හි අගයන් මැන සොයා ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එලෙසම $A\hat{P}Q$ හා ඊට ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{S}Q$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

වෘත්තයක ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය එම කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන බව ඉහත ක්‍රියාකාරකම් මගින් අවබෝධ වන්නට ඇත.

නිදසුන 1



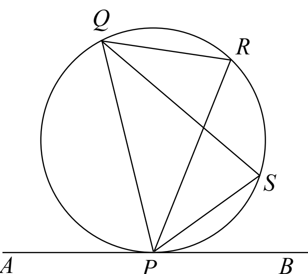
ඉහත දැක්වෙන රූපයේ PQ රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. B, C සහ D ලක්ෂ්‍ය එම වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. $P\hat{A}B = 55^{\circ}$ සහ $A\hat{D}C = 120^{\circ}$ කි. $B\hat{A}C$ අගය සොයන්න.

මුලින් ම $P\hat{A}C$ කෝණයෙහි අගය සොයමු.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$55^{\circ} + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$B\hat{A}C = 120^{\circ} - 55^{\circ}$$
$$= \underline{\underline{65^{\circ}}}$$

AB රේඛාව P හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. Q සහ R එම වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය S හිදී වෘත්තය හමු වේ. PS යන්න $B\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන නිසා)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා)

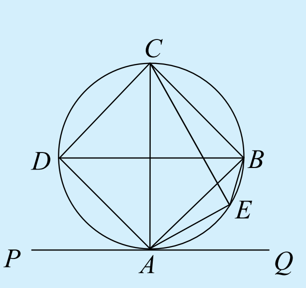
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (දත්තය, $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය QS නිසා)

$\therefore \; B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore \; PS$, $B\hat{P}R$ කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

22.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය PQ වේ. B, C, D සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටයි.



ස්පර්ශකයත් ජ්‍යායත් අතර කෝණය	අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

2. එක් එක් රූප සටහනේ AB ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයට X ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයකි. වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

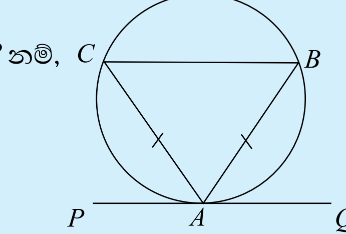


3. PQ යනු A හි දි වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. $AC = AB$ නම්,

(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ බවත්

(ii) PQ // CB බවත්

පෙන්වන්න.



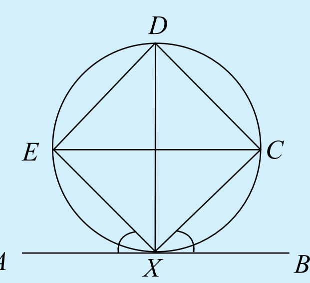
4. AB යනු X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. C සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටා ඇත්තේ $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ වන පරිදි ය. D වෘත්තය මත පිහිටි තවත් ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) $E\hat{D}C$ හි සමච්ඡේදකය XD බව

(ii) $EX = CX$ බව

(iii) AB // EC බව

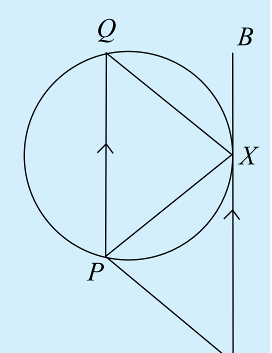
පෙන්වන්න.



5. AB රේඛාව X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. PQ // AB වන සේ PQ ජ්‍යාය ඇඳ ඇත.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ බව සාධනය කරන්න.

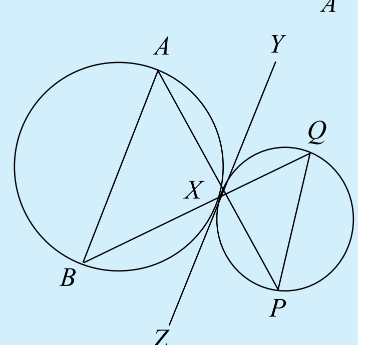
(ii) $PX = PA$ නම් $AXQP$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



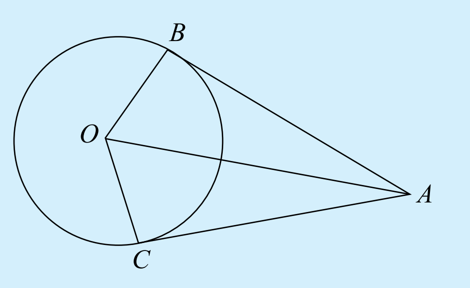
6. වෘත්ත දෙකක් බාහිරව X ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ වේ. YZ පොදු ස්පර්ශකය වේ. AB එක් වෘත්තයක ජ්‍යායකි. දික් කරන ලද AX සහ BX පිළිවෙලින් අනෙක් වෘත්තය P හා Q හි දී හමුවේ.

(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ බව පෙන්වන්න.

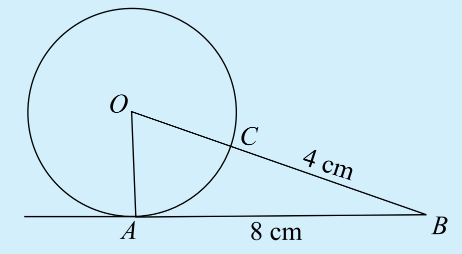
(ii) AB // PQ බව පෙන්වන්න.



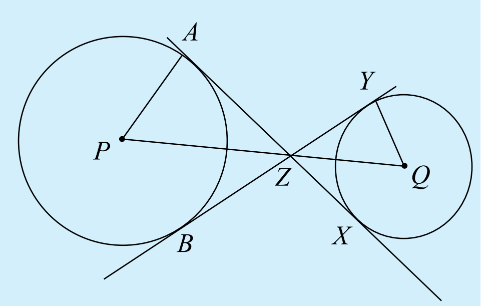
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය



1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A සිට අඳින ලද ස්පර්ශක B හා C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තයේ අරය 5 cm හා $OA = 13$ cm නම් $OBAC$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකය AB වේ. OB, C හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි. $CB = 4$ cm සහ $AB = 8$ cm වේ. වෘත්තයේ අරය ගණනය කරන්න.

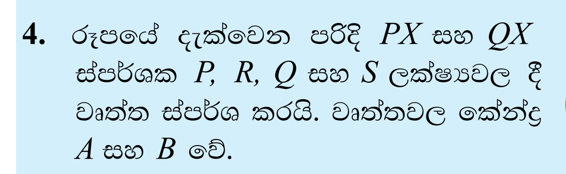


3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර P හා Q වේ. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී එම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් X හා Y හිදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. තවද මෙම ස්පර්ශක දෙක Z හිදී එකිනෙක ඡේදනය වේ.

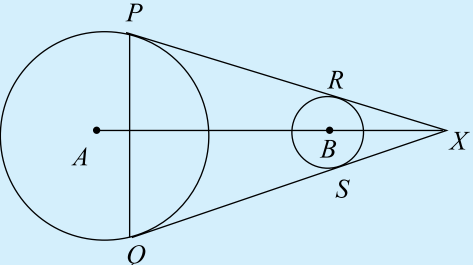
(i) $AX = BY$ බව

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ බව

පෙන්වන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි PX සහ QX ස්පර්ශක P, R, Q සහ S ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තවල කේන්ද්‍ර A සහ B වේ.



(i) $PR = QS$ බව

(ii) PQ // RS බව

(iii) A, B සහ X එකම සරල රේඛාවක පිහිටන බව

පෙන්වන්න.

23



මෙම පාඩම අධ්‍යයනයෙන් ඔබට
- සරල රේඛා හා කෝණ ආශ්‍රිත නිර්මාණ කිරීමට
- ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය කිරීමට
- වෘත්ත ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

23.1 සරල රේඛා හා කෝණ ආශ්‍රිත නිර්මාණ

මෙම පාඩමේ ඉදිරි කොටස්වල දී අධ්‍යයනය කිරීමට නියමිත නිර්මාණ සඳහා උපයෝගී වන නිර්මාණ කීපයක් දැන් පුනරීක්ෂණය කරමු. ඒ සඳහා කවකටුව හා සරල දාරය පමණක් භාවිත කරනු ලැබේ.

1. සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට ලම්බ සමච්ඡේදකයක් නිර්මාණය කිරීම.

සරල රේඛා ඛණ්ඩයක ලම්බ සමච්ඡේදකය යන්නෙන් අදහස් වන්නේ රේඛා ඛණ්ඩයේ හරි මැද ලක්ෂ්‍යය හරහා, සරල රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බව ඇඳි රේඛාවයි.

AB රේඛා ඛණ්ඩයක් සලකමු.

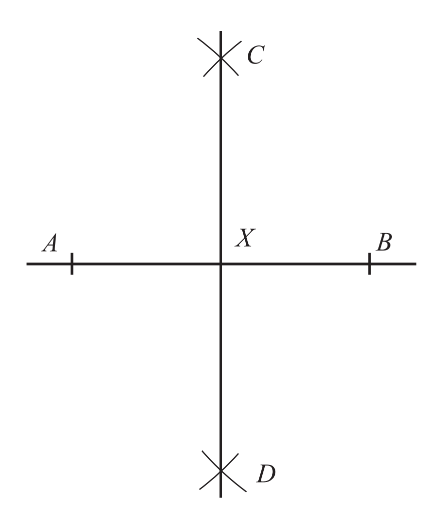


පියවර 1: AB රේඛාවෙන් හරි අඩකට වඩා වැඩි අරයක් ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. A ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන, සරල රේඛාවේ ඉහළින් හා පහළින් වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම අරයම සහිත ව (එනම්, කවකටුව වෙනස් නොකර) B ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන, ඉහත දී අඳින ලද වෘත්ත චාප දෙක ඡේදනය වන පරිදි තවත් වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

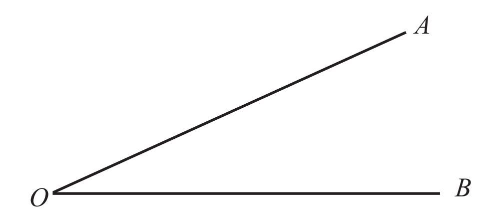
පියවර 3: එම වෘත්ත චාප ඡේදනය වූ ලක්ෂ්‍ය C හා D ලෙස නම් කර, C හා D හරහා ගමන් කරන සරල රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න.

පියවර 4: අඳින ලද සරල රේඛා ඛණ්ඩය AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.



CD මගින් ලැබෙන්නේ AB රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකයයි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{X}C$, $B\hat{X}C$, $A\hat{X}D$ හා $B\hat{X}D$ කෝණ මැනීමෙන් ද cm / mm පරිමාණයක් භාවිතයෙන් AX හා BX හි දිග මැනීමෙන් ද ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

2. කෝණයක සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කිරීම :
   AOB කෝණයක් සලකන්න.

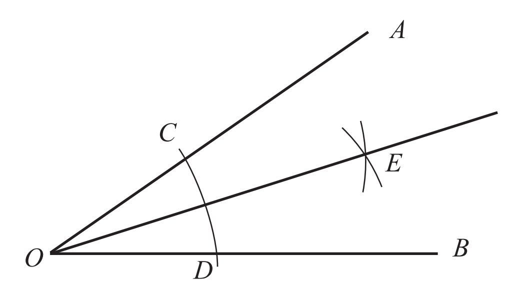


පියවර 1: OA හා OB හි දිගට වඩා අඩු අරයක් ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. O ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන OA හා OB සරල රේඛා ඛණ්ඩ ඡේදනය වන සේ වෘත්ත චාපයක් අඳින්න.

පියවර 2: වෘත්ත චාපය මඟින් OA හා OB රේඛා ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් C හා D ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: කවකටුවට සුදුසු දුරක් අරය සේ ගෙන C හා D කේන්ද්‍ර කොටගත් එකිනෙක ඡේදනය වන වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න. එම ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E ලෙස ලකුණු කරන්න.

පියවර 4: O හා E යා කරන්න.



OE මඟින් ලැබෙන්නේ $A\hat{O}B$ හි කෝණ සමච්ඡේදකයයි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{O}E$ හා $B\hat{O}E$ මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

3. රේඛා ඛණ්ඩයක් මත දී ඇති ලක්ෂ්‍යයක දී ලම්බයක් නිර්මාණය කිරීම.
AB රේඛාව මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ලම්බය ඇඳිය යුතු යැයි සිතමු.

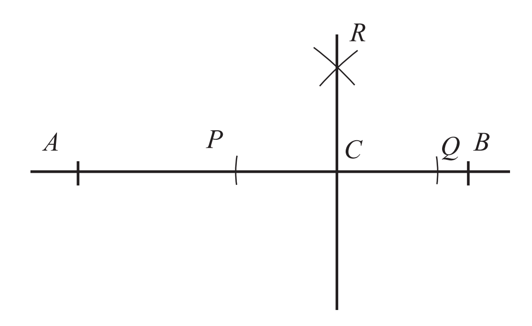


පියවර 1: සුදුසු අරයක් කවකටුවට ගෙන C ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන C ලක්ෂ්‍යයට දෙපසින් පිහිටන සේ AB රේඛා ඛණ්ඩය මත වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම වෘත්ත චාප මඟින් AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය වන ස්ථාන P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: P හා Q ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන එකිනෙක ඡේදනය වන සේ එකම අරය සහිත වෘත්ත චාප දෙකක් රේඛාවට ඉහළින් (හෝ පහළින්) අඳින්න.

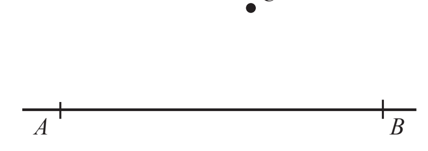
පියවර 4: එම චාප දෙක ඡේදනය වූ ලක්ෂ්‍යය R ලෙස නම්කර C හා R යා කෙරෙන සරල රේඛාව අඳින්න.



CR මඟින් ලැබෙන්නේ C හිදී AB ට ඇඳි ලම්බයයි. $A\hat{C}R$ හා $B\hat{C}R$ හි විශාලත්ව මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

4. සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට එම සරල රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බයක් නිර්මාණය කිරීම.

දී ඇති සරල රේඛා ඛණ්ඩය AB යැයි ද පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය C යැයි ද ගනිමු.

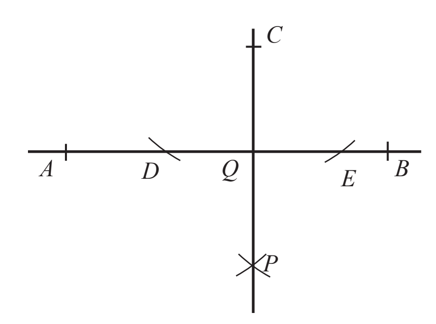


පියවර 1: C සිට AB ට ඇති දුරට මඳක් වැඩි දුරක් අරය ලෙස ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. C ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන AB ඡේදනය වන සේ වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම වෘත්ත චාප මඟින් AB ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය D හා E ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: ඉහත අරයම (හෝ වෙනත් සුදුසු අරයක්) කවකටුවට ගෙන D හා E කේන්ද්‍ර ලෙස ගෙන AB රේඛා ඛණ්ඩයෙන් C පිහිටි පැත්තට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ එකිනෙක ඡේදනය වන වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 4: එම වෘත්ත චාප දෙක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම්කර CP යා කරන්න. CP මඟින් AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය Q ලෙස නම් කරන්න.



CP මගින් ලැබෙන්නේ C ලක්ෂ්‍යයේ සිට AB රේඛා ඛණ්ඩයට අඳින ලද ලම්බය යි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $C\hat{Q}A$ හා $C\hat{Q}B$ හි විශාලත්වය මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

23.1 අභ්‍යාසය

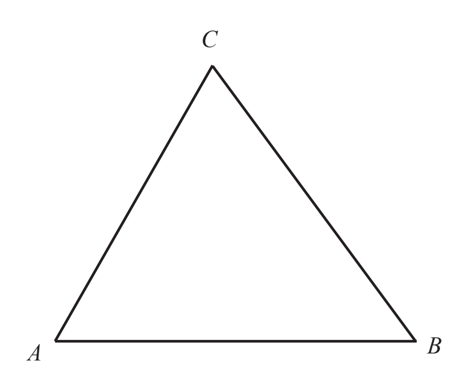
1. $AB = 5.2$ cm වන AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
2. 90° කෝණයක් නිර්මාණය කර එහි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
3. $AB = 6$ cm ද $A\hat{B}C = 60^{o}$ ද $BC = 5$ cm ද වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය ද නිර්මාණය කරන්න.
4. (i) $PQ = 7$ cm ද $QR = 6.5$ cm ද $PR = 5$ cm ද වූ PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $Q\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය හා $P\hat{Q}R$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
5. (i) $XY = 5.5$ cm වන රේඛා ඛණ්ඩයක් අඳින්න.
   (ii) X හිදී XY ට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම ලම්බය ඔස්සේ X සිට 4 cm ක් දුරින් වූ Z නම් ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කර YZ යා කර X සිට YZ ට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.
6. (i) පාදයක දිග 6 cm වූ ABC නම් සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) එක් එක් ශීර්ෂයේ සිට සම්මුඛ පාදයට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.

23.2 ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය

ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග හා කෝණවල විශාලත්ව දී ඇති විට කවකටුව හා සරල දාරය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණ නිර්මාණය කරන ආකාරය මීට පෙර ඔබ අධ්‍යයනය කර ඇත. දැන් කවකටුව හා සරල දාරය පමණක් භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය කළ හැකි අවස්ථා තුනක් අධ්‍යයනය කරමු.

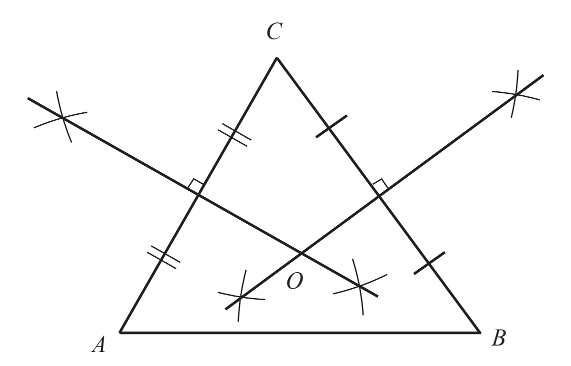
ත්‍රිකෝණයක පරිවෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.

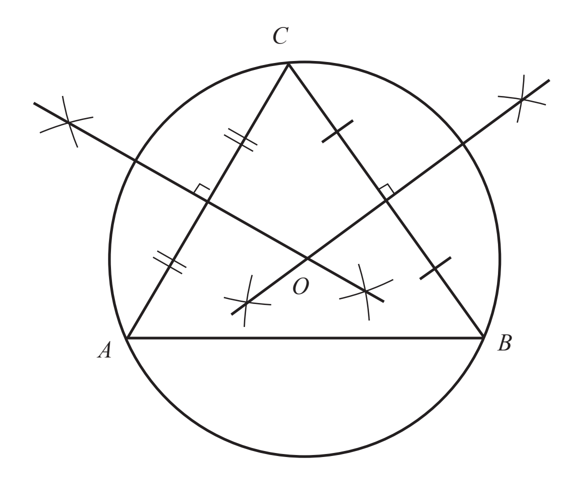


පියවර 1: කවකටුව භාවිතයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, BC හා AC පාද තුනෙන් ඕනෑම පාද දෙකක ලම්බ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

පියවර 2: ලම්බ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කරන්න.



පියවර 3: O කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන O සිට ත්‍රිකෝණයේ ඕනෑම ශීර්ෂයකට ඇති දුර අරය ලෙස ද ගෙන, වෘත්තයක් අඳින්න.



ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය ත්‍රිකෝණයේ A, B හා C ශීර්ෂ තුනම හරහා ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. එම වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ **පරිවෘත්තය** ලෙස හැඳින්වේ. පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **පරිකේන්ද්‍රය** නම් වේ.

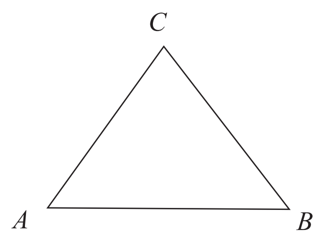
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් හා මහාකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එම ත්‍රිකෝණවල ද පරිවෘත්ත නිර්මාණය කරන්න.

එම නිර්මාණ ඇසුරෙන් පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ත්‍රිකෝණය	පරිකේන්ද්‍රයේ පිහිටීම		
	ත්‍රිකෝණය තුළ	ත්‍රිකෝණයේ පාදයක් මත	ත්‍රිකෝණයට පිටත
සුළුකෝණික ත්‍රිකෝණය ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය මහාකෝණික ත්‍රිකෝණය	✓	×	×

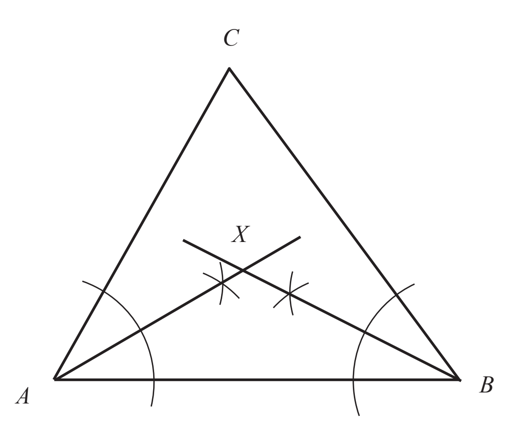
ත්‍රිකෝණයක අන්තර්වෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.

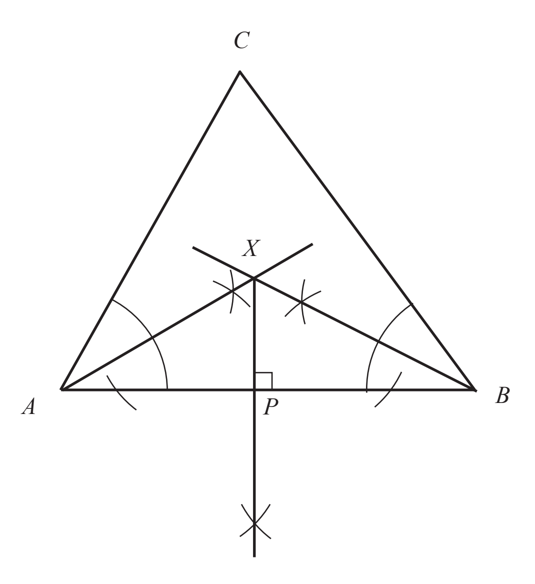


පියවර 1: කවකටුව භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ හා $A\hat{C}B$ කෝණවලින් ඕනෑම කෝණ දෙකක සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

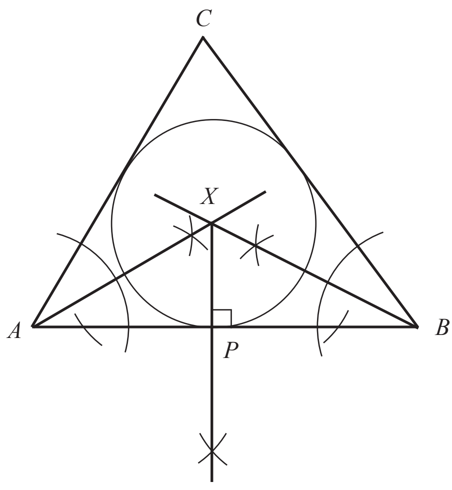
පියවර 2: කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 3 : X සිට ත්‍රිකෝණයේ ඕනෑම පාදයකට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එම ලම්බයේ අඩිය P ලෙස නම් කරන්න.



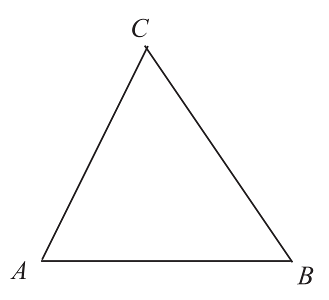
පියවර 4 : X කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන XP අරය වූ වෘත්තය අඳින්න.



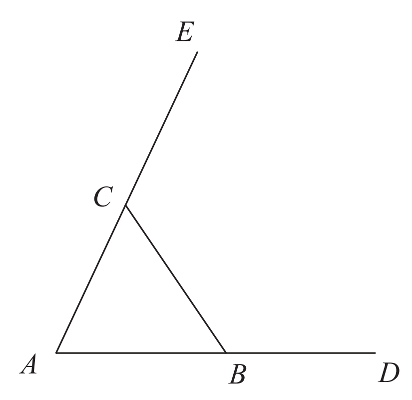
ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය, ත්‍රිකෝණයේ ඇතුළතින් AB, BC හා AC පාද ස්පර්ශ කරමින් ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. ඒ අනුව එම වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ **අන්තර්වෘත්තය** ලෙස හැඳින්වේ. අන්තර්වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **අන්තර්කේන්ද්‍රය** නම් වේ.

ත්‍රිකෝණයක බහිර් වෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ABC ත්‍රිකෝණය සලකමු.

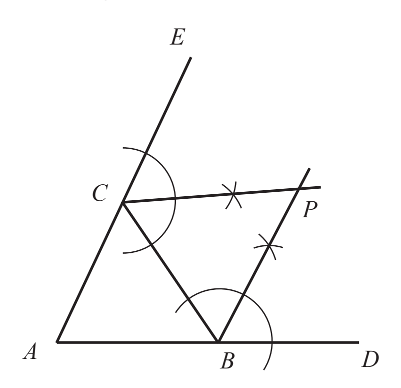


පියවර 1: AB පාදය D තෙක් ද AC පාදය E තෙක් ද දික් කරන්න.

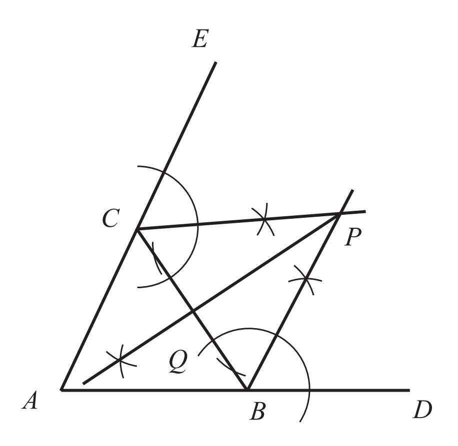


පියවර 2: කවකටුව භාවිතයෙන් $C\hat{B}D$ හා $B\hat{C}E$ හි කෝණ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

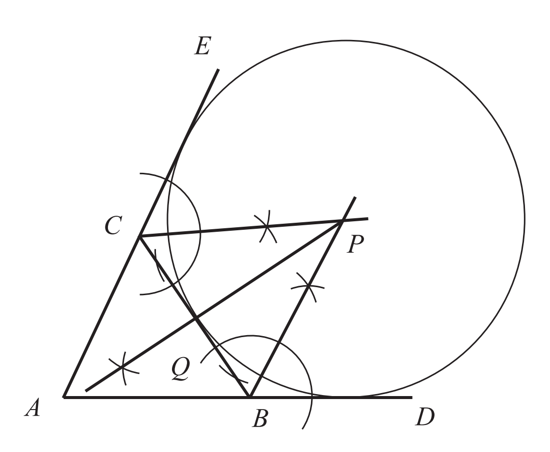
පියවර 3: කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 4: P සිට BC පාදයට (හෝ CE හෝ BD රේඛා ඛණ්ඩ මතට) ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එම ලම්බයේ අඩිය Q ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 5: P කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන PQ අරය වූ වෘත්තයක් අඳින්න.



ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය දික්කල AC හා AB පාද දෙක සහ BC පාදය ත්‍රිකෝණයට බාහිරින් ස්පර්ශ කරමින් ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. ඒ අනුව එම වෘත්තය, ABC ත්‍රිකෝණයේ **බහිර්වෘත්තයක්** ලෙස හැඳින්වේ. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **බහිර් කේන්ද්‍රය** නම් වේ.

සටහන: ඉහත ත්‍රිකෝණයේ දික්කල CB හා CA පාද බාහිරින් ස්පර්ශ වන බහිර්වෘත්තය මෙන්ම දික්කල BA හා BC පාද ස්පර්ශ වන බහිර්වෘත්ත ද නිර්මාණය කළ හැකි ය. මේ අනුව, ත්‍රිකෝණයකට බහිර්වෘත්ත තුනක් ඇති බව අවබෝධ කර ගන්න.

23.2 අභ්‍යාසය

1. (i) $AB = 5$ cm, $BC = 4.5$ cm හා $AC = 4$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) BC හා AC පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා හමුවන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
   (iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

2. (i) $PQ = 6$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{o}$ හා $QR = 4$ cm වූ PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

3. (i) $XY = 4.2$ cm ද $Y\hat{X}Z = 120^{o}$ ද $X\hat{Y}Z = 30^{o}$ ද වූ XYZ ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) XYZ ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) පරිවෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

4. (i) $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm හා $AC = 5.5$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $A\hat{B}C$ හා $B\hat{A}C$ කෝණවල සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.
   (iv) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර්වෘත්තය අඳින්න.

5. (i) $KL = 6$ cm ද $L\hat{K}M = 105^{o}$ ද $LM = 9$ cm ද වූ KLM ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) KLM ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය නිර්මාණය කර එහි අරය මැන ලියන්න.

6. (i) $CD = 5.5$ cm ද $C\hat{D}E = 60^{o}$ ද $DE = 4$ cm ද වූ CDE ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $DP = 2.8$ cm වන පරිදි CD පාදය P දක්වාත් $EQ = 2.5$ cm වන පරිදි CE පාදය Q දක්වාත් ද දික් කරන්න.
   (iii) $E\hat{D}P$ හා $D\hat{E}Q$ කෝණවල සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා හමුවන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.
   (iv) X සිට DE ට ලම්බයක් නිර්මාණය කර එම ලම්බය DE හමුවන ලක්ෂ්‍යය K ලෙස නම් කරන්න.
   (v) X කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන XK අරය වන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

7. (i) $AB = 6.2$ cm, $A\hat{B}C = 120^{o}$, $BC = 4.5$ cm වූ $ABCD$ නම් සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) AB පාදය හා AC පාදය දික්කිරීමෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ බහිර් වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම වෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

23.3 වෘත්තයකට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීම

ස්පර්ශක පාඩමේ දී ඉගෙනගත් වෘත්ත ස්පර්ශක සම්බන්ධ ප්‍රමේයයන් දෙකක් නැවත මතකයට නගා ගනිමු.

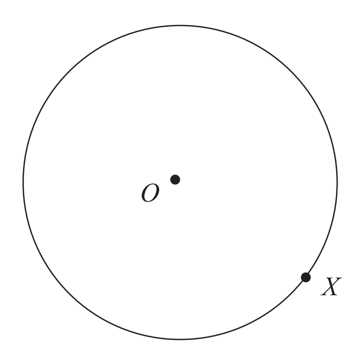
1. වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ එම ලක්ෂ්‍යයේ දී අරයට ලම්බකව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.
2. වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි (බාහිර) ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයන් භාවිතයෙන් වෘත්ත ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන ආකාරය දැන් අධ්‍යයනය කරමු.

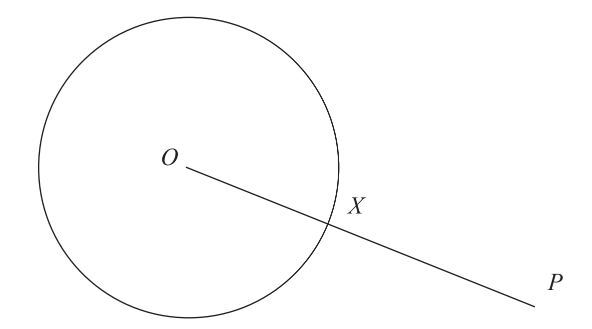
වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

මෙම නිර්මාණය කිරීම සඳහා "වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි සරල රේඛා ඛණ්ඩය වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ" යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමු.

දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O යැයි ද X යනු වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.

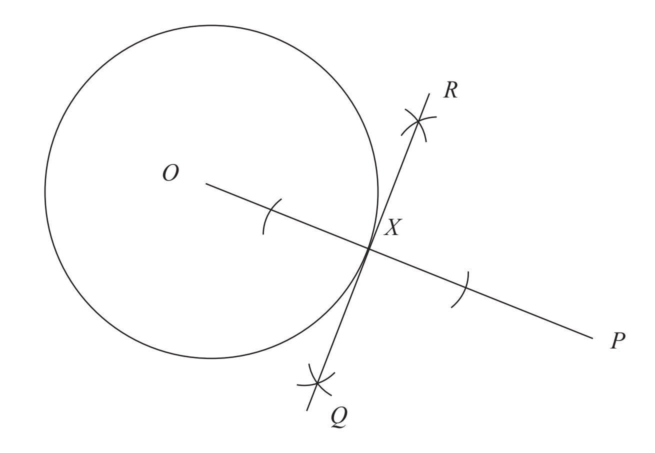


පියවර 1: OX රේඛාව ඇඳ එය දික් කළ කොටස මත P ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.



පියවර 2: කවකටුව භාවිතයෙන් X හිදී OP රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. ඒ සඳහා රේඛා ඛණ්ඩයක් මත, දී ඇති ලක්ෂ්‍යයක දී ලම්බයක් නිර්මාණය කරන ආකාරය පිළිබඳ ව ඔබ උගත් කරුණු උපයෝගී කර ගන්න.

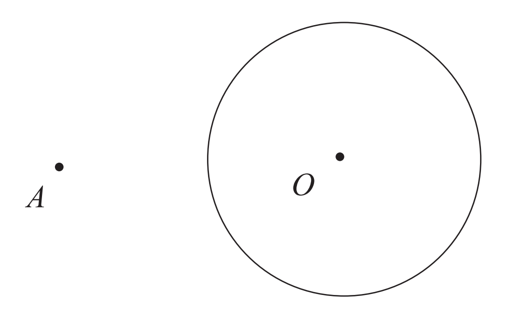
පියවර 3: එම ලම්බය RQ ලෙස නම් කරන්න.



RQ මගින් ලැබෙන්නේ X හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය යි.

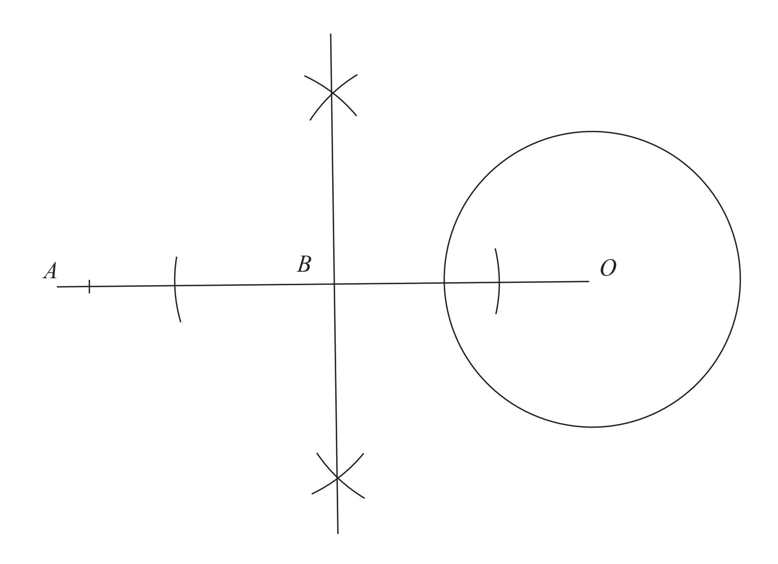
බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O යැයි ද A යනු වෘත්තයට පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.



මෙම නිර්මාණය කිරීම සඳහා "වෘත්තයට පිටතින් පිහිටි (බාහිර) ලක්ෂ්‍යයක සිට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ" යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමු.

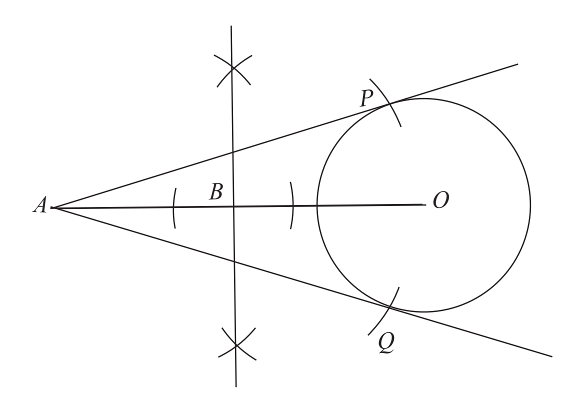
පියවර 1 : OA රේඛාව ඇඳ OA රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කර එය OA ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය B ලෙස නම් කරන්න. ඒ සඳහා රේඛා ඛණ්ඩයක ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන ආකාරය පිළිබඳ ව ඔබ උගත් කරුණු උපයෝගී කරගන්න.



පියවර 2: B කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන BO (හෝ BA) අරය ලෙස ද ගෙන වෘත්තය මත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 3: දෙන ලද වෘත්තය හා චාප ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය දෙක P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 4: AP හා AQ රේඛා අඳින්න.



AP හා AQ මඟින් ලැබෙන්නේ A සිට O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වේ. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{P}O$ හා $A\hat{Q}O$ මැන ඒවා 90° බැගින් වන බව තහවුරු කරගන්න.

23.3 අභ්‍යාසය

1. අරය 3 cm වූ වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න. වෘත්තය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. A හිදී වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.

2. (i) අරය 3.5 cm ක් වූ වෘත්තයක් නිර්මාණය කර එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න. වෘත්තය මත P නම් ලක්ෂයයක් ලකුණු කර P හි දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) ස්පර්ශකය මත $PQ = 5$ cm ක් වන සේ Q ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) OQ දිග මැන ලියන්න.
   (iv) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් OQ හි දිග ගණනය කර ඔබ ලබාගත් පිළිතුරෙහි සත්‍යතාව විමසන්න.

3. (i) පාදයක දිග 5 cm බැගින් වූ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) B හිදී AB රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද C හරහා යන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම වෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

4. (i) අරය 2.8 cm වූ O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) වෘත්තය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර OA යා කරන්න. දික්කල OA මත $OB = 5$ cm ක් වන සේ B ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) B සිට වෘත්තයට ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) ස්පර්ශකවල දිග මැන ලියන්න.

5. (i) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm හා $B\hat{A}C = 90^{\circ}$ වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) A හිදී ඉහත වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් ද නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) A හිදී නිර්මාණය කරන ලද ස්පර්ශකය හා දික්කල BC හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.
   (v) P සිට වෘත්තයට වෙනත් ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.

6. (i) $KL = 9$ cm, $K\hat{L}M = 90^{\circ}$, $LM = 4$ cm වන සේ KLM ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $K\hat{M}L$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න. එය KL රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
   (iii) O කේන්ද්‍රය ද OL අරය ද වූ වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) $ML = MT$ වන සේ T ලක්ෂ්‍යයක් KM මත ලකුණු කරන්න.
   (v) $O\hat{T}M$ හි අගය සොයන්න.
   (vi) K සිට ඉහත වෘත්තයට වෙනත් ස්පර්ශකයක් ද නිර්මාණය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 45^{o}$ හා $BC = 4$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) A හරහා BC ට සමාන්තර රේඛාවක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම සමාන්තර රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටියා වූ ද A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
2. (i) $PQ = 7$ cm, $P\hat{Q}R = 120^{o}$ හා $QR = 4.5$ cm වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි S ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.
   (iii) QS විකර්ණය අඳින්න.
   (iv) PQS ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (v) QRS ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
3. $PQ = 4.8$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{o}$ ද $QR = 6.5$ cm ද වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. PQ පාදය P හිදී ස්පර්ශ කරමින් QR පාදය ද ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.

24



මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- වෙන් රූප සටහනකට අදාළ ප්‍රදේශ හඳුනා ගැනීමටත්,
- එම ප්‍රදේශ කුලක අංකනයෙන් දැක්වීමටත්
- වෙන් රූප සටහන් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමටත්

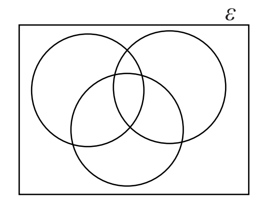
හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

වෙන් රූප සටහන්

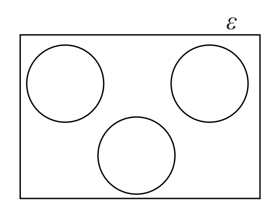
උප කුලක දෙකක් දක්වා ඇති වෙන් රූප සටහන්වලට අදාළ ප්‍රදේශ හඳුනා ගැනීමටත්, වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයක් කුලක අංකනයෙන් ලියා දැක්වීමටත් 10 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ ඉගෙන ගෙන ඇත. සර්වත්‍ර කුලකයක ඇති උප කුලක තුනක් ද වෙන් රූප සටහනක නිරූපණය කළ හැකි වේ. එසේ නිරූපණය කරන ආකාරය දැන් විමසා බලමු.

සර්වත්‍ර කුලකයක අභිශූන්‍ය නොවන උප කුලක තුනක් වෙන් රූප සටහනක පිහිටිය හැකි අවස්ථා ගණනාවක් පහත දැක්වේ. මුලින් ම දක්වා ඇත්තේ වඩාත් සාධාරණ නිරූපණය යි.

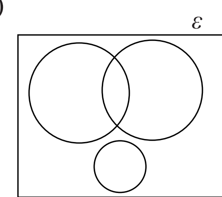

(i)



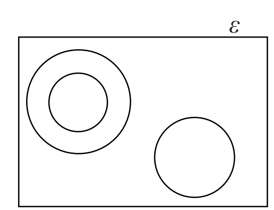
(ii)



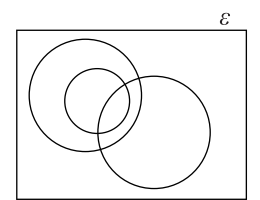
(iii)



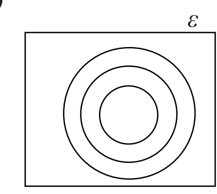
(iv)

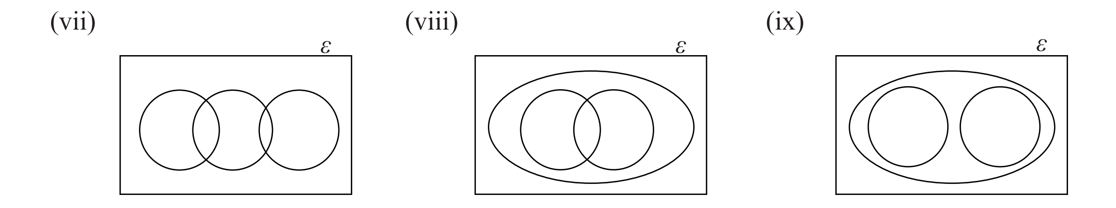


(v)



(vi)





24.1 වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයකට අදාළ උපකුලක කුලක අංකනයෙන් දැක්වීම

A, B හා C යනු සර්වත්‍ර කුලකයක අභිශූන්‍ය නොවන උපකුලක තුනක් යැයි ගනිමු. වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයක් කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වා ඇති අවස්ථා ගණනාවක් පහත දැක්වේ.

$A \cap B \cap C$

$A \cap B$

$(A \cap B) \cap C'$

$A \cap (B \cup C)'$

$A \cup B \cup C$

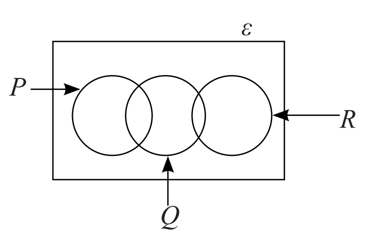
$(A \cup B \cup C)'$

$(A \cup B) \cap C'$

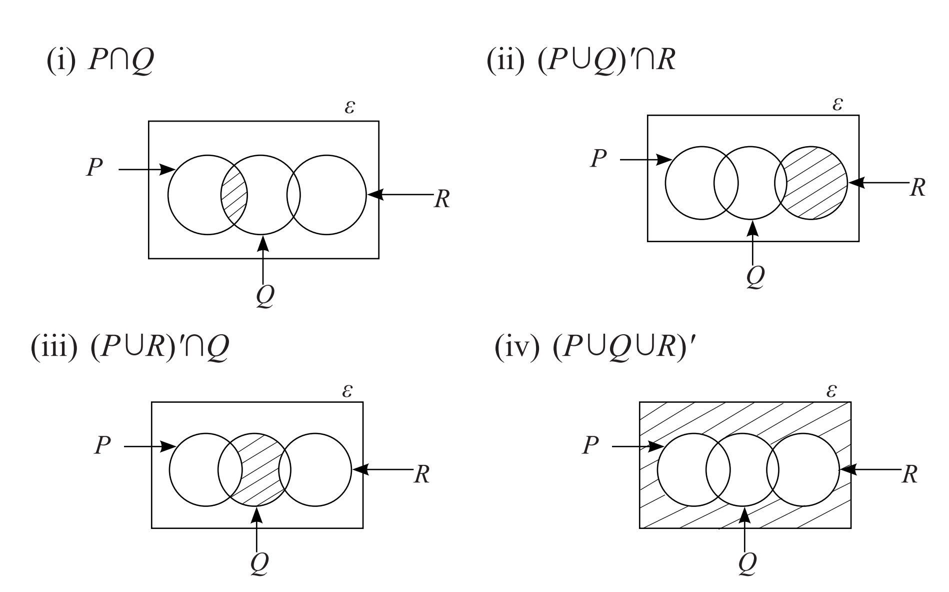
$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන එක් එක් කුලකය, දී ඇති වෙන් රූප සටහනෙහි පිටපතක අඳුරු කොට දක්වන්න.

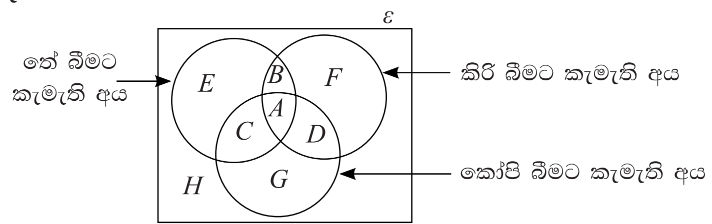


(i) $P \cap Q$ (ii) $(P \cup Q)' \cap R$ (iii) $(P \cup R)' \cap Q$
(iv) $(P \cup Q \cup R)'$



මීළඟට අප සලකා බලන්නේ, වෙන්රූප සටහනක් තුළ ඇති ප්‍රදේශ වාචික ව විස්තර කෙරෙන ආකාරය යි. නිදසුනක් ඇසුරෙන් එය හැදෑරීම වඩා පහසු ය.

පහත වෙන් රූප සටහනෙන් දැක්වෙන්නේ සිසුන් සමූහයක් කැමැති පාන වර්ග පිළිබඳ තොරතුරු වේ.



ඉහත වෙන් රූප සටහන තුළ ඉංග්‍රීසි අක්ෂර මගින් නිරූපණය වන පෙදෙස් මෙසේ වාචික ව විස්තර කළ හැකි ය.

A - තේ, කිරි හා කෝපි වර්ග තුනම බීමට කැමැති අය

B - තේ සහ කිරි පමණක් බීමට කැමති අය එනම්, තේ සහ කිරි බීමට කැමැති එහෙත් කෝපි බීමට අකමැති අය

C - තේ සහ කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

D - කිරි සහ කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

E - තේ පමණක් බීමට කැමැති අය

F - කිරි පමණක් බීමට කැමැති අය

G - කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

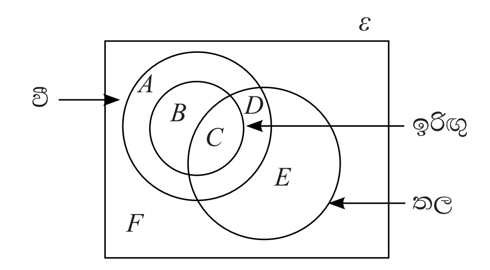
H - ඉහත පානයන් තුනම බීමට අකමැති අය

තවද, ඉහත ප්‍රදේශ කීපයක් එක්ව ගත්විට ලැබෙන මුළු ප්‍රදේශය වාචික ව විස්තර කළ හැකි ආකාරය ද බොහෝ විට සරල ව විස්තර කළ හැකි ය.

A හා B - තේ සහ කිරි බීමට කැමැති අය
B, C හා D - පාන වර්ග දෙකක් **පමණක්** බීමට කැමැති අය
A, B, C හා D - පාන වර්ග දෙකක්**වත්** බීමට කැමැති අය
A, B, C හා E - තේ බීමට කැමැති අය
E, F හා G - එක් පාන වර්ගයක් **පමණක්** බීමට කැමති අය

නිදසුන 2

පහත වෙන් රූපසටහනෙන් දැක්වෙන්නේ ගොවීන් කණ්ඩායමක් විසින් වගා කරන ලද බෝග පිළිබඳ තොරතුරු වේ. එහි එක් එක් ඉංග්‍රීසි අකුරෙන් දැක්වෙන ප්‍රදේශයට අදාළ උප කුලකයත් (i) B හා C
(ii) C හා D
(iii) A, D හා E
යන එක් එක් සංයුක්ත ප්‍රදේශයට අදාළ උප කුලකයත් වාචික ව විස්තර කරන්න.



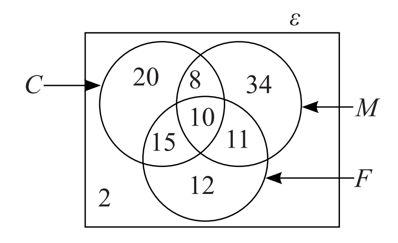
A - වී පමණක් වගා කරන ගොවීන්
B - වී සහ ඉරිඟු පමණක් වගා කරන ගොවීන්
C - වී, ඉරිඟු හා තල වර්ග තුනම වගා කරන ගොවීන්
D - වී සහ තල පමණක් වගා කරන ගොවීන්
E - තල පමණක් වගා කරන ගොවීන්
F - ඉහත වර්ග තුනම වගා නොකරන ගොවීන්
B හා C - ඉරිඟු වගා කරන ගොවීන්
C හා D - වී හා තල වගා කරන ගොවීන්
A, D හා E - එක් වර්ගයක්වත් වගා කරන නමුත් ඉරිඟු වගා නොකරන ගොවීන්

නිදසුන 3

ε = {නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක ඇති නිවාස}ලෙස ගනිමු.
C = {කාර් ඇති නිවාස}
M = {මෝටර් සයිකල් ඇති නිවාස}
F = {පාපැදි ඇති නිවාස}

මෙම උප කුලක පහත දැක්වෙන වෙන්රූප සටහනේ නිරූපණය කරනු ලැබ ඇත. සංඛ්‍යා මගින් දැක්වෙන්නේ අදාළ උප කුලකවල ඇති අවයව ගණනයි.

මෙම නිවාස යෝජනා ක්‍රමයේ,



(i) කාර් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) මෝටර් සයිකල් **පමණක්** ඇති නිවාස කොපමණ ද?
(iii) පාපැදි නැති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iv) වාහන වර්ග දෙකක් පමණක් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(v) වාහන වර්ග දෙකක්වත් ඇති නිවාස සංඛ්‍යා
(vi) එක් වාහන වර්ගයක් පමණක් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව

(i) කාර් ඇති නිවාස C කුලකයෙන් නිරූපණය වන නිසා C කුලකයට අයත් සියලු නිවාස ගත යුතු ය. එමනිසා කාර් ඇති නිවාස ගණන වන්නේ $20 + 8 + 10 + 15 = 53$.

(ii) මෝටර් සයිකල් ඇති නිවාස නිරූපණය වන්නේ M කුලකයෙනි. මෝටර් සයිකල් **පමණක්** ඇති නිවාස වන්නේ මෝටර් සයිකල් ඇති නමුත් කාර් හා පාපැදි නැති නිවාස වේ. එබැවින් මෝටර් සයිකල් තිබෙන නිවාස අතරින් කාර් හෝ පාපැදි තිබෙන නිවාස ඉවත් කළ යුතු ය. එමනිසා මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති නිවාස ගණන 34 වේ.

(iii) පාපැදි නොමැති නිවාස වන්නේ, මුළු නිවාස ගණනින් පාපැදි ඇති නිවාස ඉවත් කළ විට ලැබෙන නිවාස වේ. තවත් ආකාරයකින් කිව හොත් පාපැදි නොමැති නිවාස යනු කාර් පමණක් ඇති, මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති, කාර් සහ මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති නිවාස හා වාහන වර්ග තුනම නොමැති නිවාස වේ. එනම් $20 + 8 + 34 + 2 = 64$.

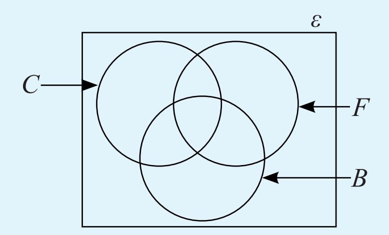
(iv) වාහන වර්ග දෙකක් පමණක් ඇති නිවාස යනු කාර් හා මෝටර් සයිකල් පමණක් ද මෝටර් සයිකල් හා පාපැදි පමණක් ද කාර් හා පාපැදි පමණක් ද ඇති නිවාස වේ. එනම්, $15 + 8 + 11 = 34$.

(v) වාහන වර්ග දෙකක්වත් ඇති නිවාස යනු වාහන වර්ග දෙකක් හෝ තුනක් ඇති නිවාස වේ. එනම්, $15 + 8 + 11 + 10 = 44$.

(vi) එක් වාහන වර්ගයක් පමණක් ඇති නිවාස වන්නේ මෝටර් සයිකලයක් පමණක්, කාර් පමණක් හෝ පාපැදි පමණක් ඇති නිවාස වේ. එනම්, $20 + 34 + 12 = 66$.

24.1 අභ්‍යාසය

1. පාසලක සිටින සිසුන් සමූහයකින් එක් එක් සිසුවා කැමැති ක්‍රීඩාව පිළිබඳව ලබාගත් තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කෙරුණු වෙන් රූප සටහනක් පහත දැක්වේ.

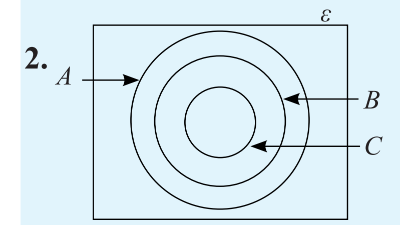


C = {ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}
F = {පාපන්දු ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}
B = {පැසිපන්දු ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}

මෙම වෙන්රූප සටහන් ආකෘතිය භාවිතයෙන් පහත එක් එක් අංකනයෙන් දක්වා ඇති කුලකය නිරූපණය කෙරෙන ප්‍රදේශය අඳුරු කර දක්වා එය වාචිකව ද විස්තර කර ලියන්න.

(i) $B \cap C \cap F$ (ii) $(C \cap F) \cap B'$ (iii) $(B \cup C)' \cap F$ (iv) $(B \cup C \cup F)'$

2.

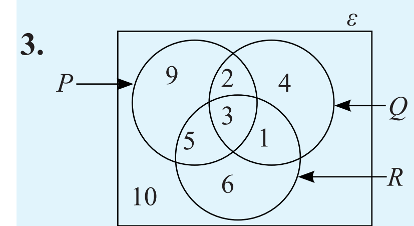


දී ඇති වෙන් රූප සටහන් ආකෘතිය භාවිතයෙන්,

(a) පහත එක් එක් අංකනයෙන් දක්වා ඇති උප කුලකය නිරූපණය කෙරෙන ප්‍රදේශය අඳුරු කර දක්වන්න.

(i) $A \cap B \cap C$ (ii) $B \cap C'$
(iii) $A \cap (B \cup C)'$ (iv) $(A \cup B \cup C)'$

3.



මෙම වෙන් රූප සටහන අනුව පහත සඳහන් ඒවා සොයන්න.

(i) $n\,(P \cap Q \cap R)$ (ii) $n\,(Q \cup R)'$
(iii) $n\,[(P \cap Q) \cap R']$ (iv) $n\,[(Q \cup R)' \cap P]$
(v) $n\,(P \cup Q \cup R)'$

වෙන්රූප සටහන තුළ ලකුණු කර ඇත්තේ එක් එක් පෙදෙසට අයත් අවයව ගණන බව සළකන්න.

24.2 කුලක ආශ්‍රිත ගැටලු තවදුරටත්

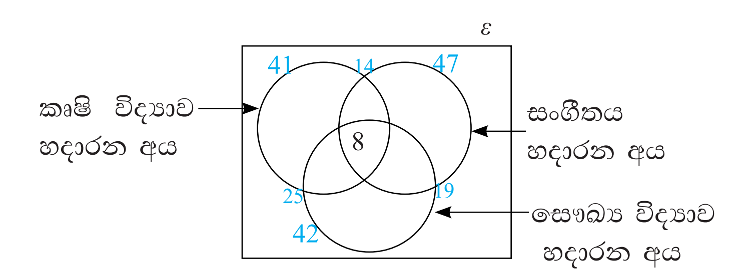
කුලක ආශ්‍රිත ව ගැටලු විසඳීම උදාහරණ කීපයකින් විමසමු.

නිදසුන 1

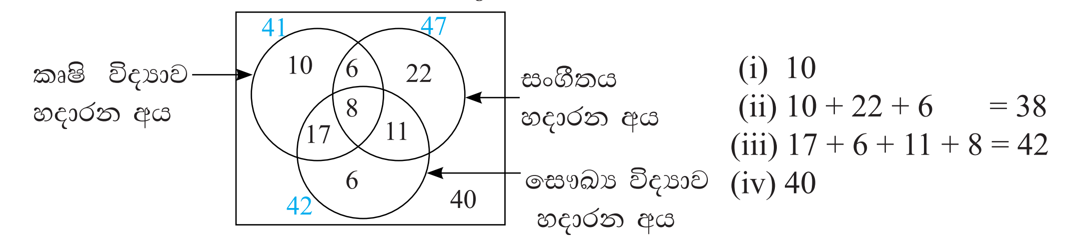
සිසුන් 120ක කණ්ඩායමකින් 41ක් කෘෂි විද්‍යාව ද, 47ක් සංගීතය ද, 42ක් සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද හදාරති. 14ක් කෘෂි විද්‍යාව හා සංගීතය ද, 19ක් සංගීතය හා සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද, 25ක් කෘෂි විද්‍යාව හා සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද, 8ක් විෂයන් තුනම ද හදාරති. මෙම තොරතුරු වෙන්

රූප සටහනක දක්වා පහත සඳහන් දෑ සොයන්න.

(i) කෘෂි විද්‍යාව පමණක් හදාරන සිසුන් ගණන
(ii) එක් විෂයක් පමණක් හදාරන සිසුන් ගණන
(iii) විෂයන් දෙකක්වත් හදාරන සිසුන් ගණන
(iv) මින් කිසි ම විෂයක් නොහදාරණ සිසුන් ගණන



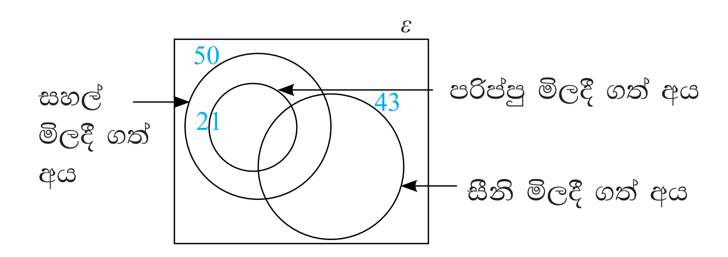
දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් ඉතිරි ප්‍රදේශවල ඇති අවයව ගණන සොයමු.



(i) 10
(ii) $10 + 22 + 6 = 38$
(iii) $17 + 6 + 11 + 8 = 42$
(iv) 40

නිදසුන 2

එක්තරා දිනයක දී පැයක් ඇතුළත වෙළෙඳසැලකට පැමිණි පාරිභෝගිකයන් පිළිබඳ ව රැස්කර ගත් තොරතුරු අනුව 50 දෙනෙක් සහල් ද, 21දෙනෙක් පරිප්පු ද, 43 දෙනෙක් සීනි ද මිලදී ගෙන ඇත. තවද පරිප්පු මිල දී ගත් සියලු දෙනාම සහල් ද මිලදී ගෙන ඇත. එම තොරතුරු හා වෙනත් තොරතුරු වෙන් රූප සටහනේ දැක්වේ.



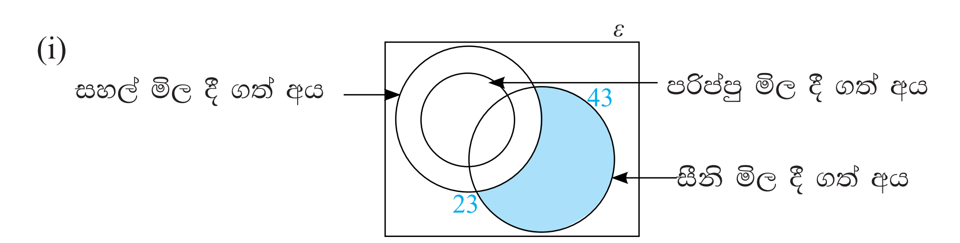
(i) සහල් සහ සීනි මිලදී ගත් අය 23කි. සීනි පමණක් මිලදී ගත් අය ගණන කොපමණ ද?
(ii) වර්ග තුනම මිලදී ගත් අය 12ක් වේ. සහල් සහ පරිප්පු යන වර්ග දෙක **පමණක්** මිලදී ගත් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) සහල් පමණක් මිලදී ගත් අය

(iv) එම පැය තුළ පැමිණි මුළු පිරිස 90ක් නම් සහල්, පරිප්පු හා සීනි හැර වෙනත් දේ ගැනීමට පැමිණි සංඛ්‍යාව කීය ද?

පිළිතුරු

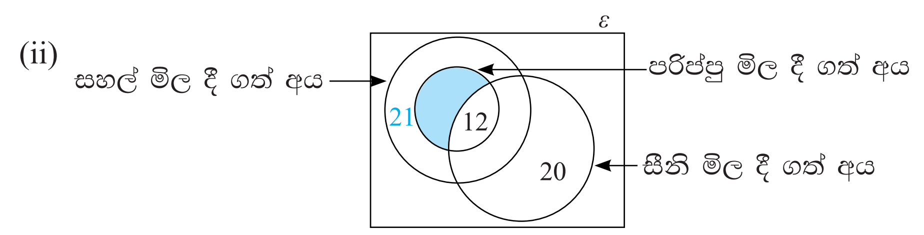
දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් එක් එක් ප්‍රදේශයට අයත් අවයව ගණන සොයමු.

(i)



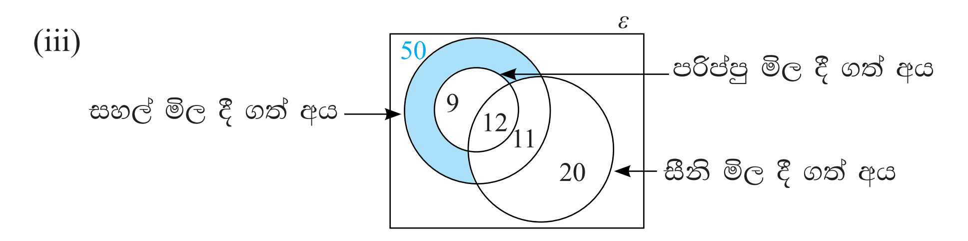
සීනි පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ $43 - 23 = 20$

(ii)



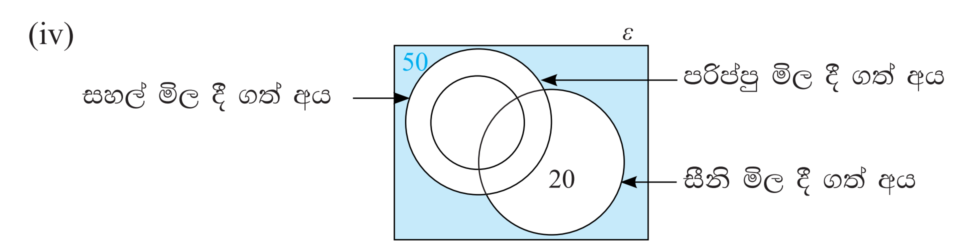
සහල් හා පරිප්පු පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ $21 - 12 = 9$

(iii)



සහල් පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ $50 - 9 - 12 - 11 = 18$

(iv)



සහල්, පරිප්පු හා සීනි හැර වෙනත් දේ ගැනීමට පැමිණි අය ගණන $90 - 70 = 20$

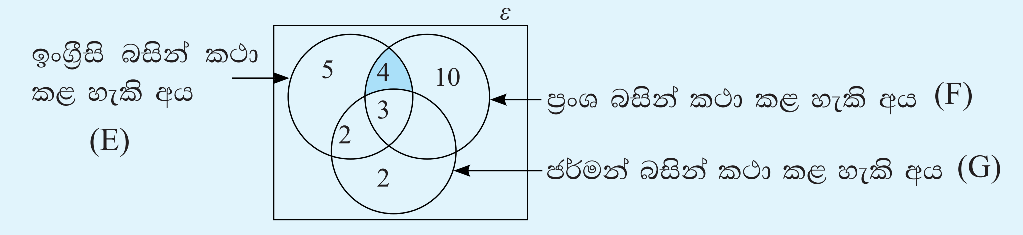
24.2 අභ්‍යාසය

1. පාසල් ලිපි ද්‍රව්‍ය විකුණන කඩයකට පැමිණි 20 දෙනෙක් තමාට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය මිලදී ගත් අයුරු මෙසේ වෙයි. පැන්සල් ගත් අය 8 දෙනෙක් ද, පෑන් ගත් අය 11 දෙනෙක් ද, පොත් ගත් අය 13 දෙනෙක් ද වන අතර පැන්සල් හා පොත් ගත් 6 දෙනාගෙන් 4 දෙනෙක් පෑන් නොගත්හ. පැන්සල් හා පෑන් යන දෙවර්ගය ම ගත් අය 3 දෙනෙකි. පෑන් පමණක් ගත් අයද 3 දෙනෙකි. වෙන් සටහනක් භාවිතයෙන් මේවා සොයන්න.

(i) ඉහත ද්‍රව්‍ය කිසිවක් නොගත් අය කොපමණ ද?
(ii) පෑන් නොගත් අය කොපමණ ද?
(iii) කඩයට පැමිණි මුළු සංඛ්‍යාවෙන් කවර ප්‍රතිශතයක් මෙම ද්‍රව්‍යවලින් අඩු වශයෙන් වර්ග දෙකක්වත් මිලදී ගත්තේ ද?

2. A, B හා C නැමැති පුවත්පත් තුන මිල දී ගැනීම පිළිබඳ ව එක් ගමක කරන ලද සමීක්ෂණයක දී පහත තොරතුරු ලැබුණි. 50% ක් A පුවත්පත ද, 67% ක් B පුවත්පත ද, 55% ක් C පුවත්පත ද මිලදී ගනිති. 10% ක් A හා B පුවත්පත් පමණක් ගනී. 15% ක් A පුවත්පත පමණක් ගනී. 5% ක් A හා C පුවත්පත් ගන්නා නමුත් B පුවත්පත නොගනී. 17% ක් A පුවත්පත නොගන්නා නමුත් B හා C පුවත්පත් ගනී. වෙන් රූප සටහනක් මගින් මේවා සොයන්න.
(i) පුවත්පත් වර්ග තුනම ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය
(ii) A පුවත්පත නොගන්නා එහෙත් C පුවත්පත ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය
(iii) පුවත්පත් දෙකක් පමණක් ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය

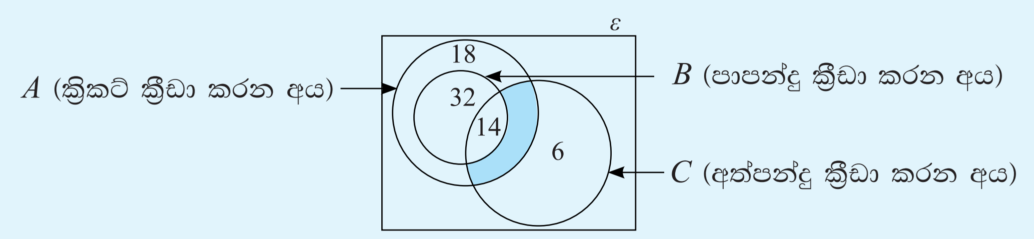
3. සීගිරිය නැරඹීමට පැමිණි විදේශීය සංචාරක කණ්ඩායමක සිටිනා සංචාරකයනට කථා කළ හැකි භාෂා පිළිබඳ ව පත්‍රිකාවක සටහන් කරනු ලැබූ තොරතුරු ඇසුරෙන් පහත වෙන් රූප සටහන ඇඳ ඇත.



(i) ඉංග්‍රීසි භාෂාවෙන් කථා කළ හැකි සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) ජර්මන් භාෂාව කථා කළ හැකි මුළු පිරිස 12 නම් ප්‍රංශ හා ජර්මන් පමණක් කථා කළ හැකි සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) රූපයේ අඳුරු කර ඇති පෙදෙසින් නිරූපණය වන සංචාරකයන්ගේ භාෂා හැකියා පිළිබඳ වචනයෙන් විස්තර කරන්න. එම පෙදෙස කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.
(iv) ඉංග්‍රීසි භාෂාව කථා කළ හැකි සියලු දෙනා ඉංග්‍රීසි විස්තර විචාරකයා විසින් රැඳවා ගෙන ඉතිරි අය ජර්මන් සහ ප්‍රංශ භාෂා දෙකම කථා කළ හැකි විස්තර

විචාරකයෙකු වෙත භාර දෙන ලදී. එම විචාරකයා වෙත භාර දුන් මුළු පිරිස කොපමණ ද?

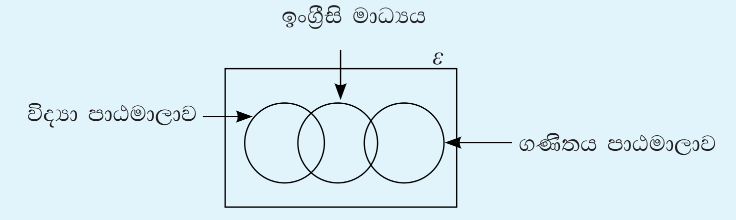
4. එක්තරා ක්‍රීඩා පාසලක ක්‍රීඩා පුහුණුව ලබන සෑම ශිෂ්‍යයෙක්ම, ක්‍රිකට්, පාපන්දු හා අත්පන්දු යන ක්‍රීඩා එකකට හෝ කීපයකට සහභාගී වේ. එම අය පිළිබඳ තොරතුරු වෙන් රූපයේ දැක්වේ.



(i) මෙම ක්‍රීඩා තුනම කරන සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවට පමණක් සහභාගී වන සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) අඳුරු කළ පෙදෙසින් දැක්වෙන්නේ කුමන ක්‍රීඩා කරන අය දැයි සඳහන් කර එය කුලක අංකනයෙන් දක්වන්න.
(iv) අත්පන්දු ක්‍රීඩා කරන අය 25ක් නම් අඳුරු කළ පෙදෙසේ සිටින ක්‍රීඩකයන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

5. ගුරු පුහුණු විද්‍යා පීඨයක් සඳහා එක් වර්ෂයක දී සිසුන් 400ක් බඳවා ගන්නා ලදී. එම පීඨයෙහි ඉගැන්වෙන ගණිතය, විද්‍යාව හා ශාරීරික අධ්‍යාපනය යන සෑම පාඨමාලාවක් ම සිංහල හා ඉංග්‍රීසි යන මාධ්‍ය දෙකෙන් ම පැවැත්වේ.

(*a*) දී ඇති වෙන් රූපයේ පහත දැක්වෙන තොරතුරු අදාළ ස්ථානවල සටහන් කරමින් වෙන් රූපය සම්පූර්ණ කරන්න.



(i) විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ 140ක් සිටින අතර ඉන් 100ක් සිංහල මාධ්‍ය පාඨමාලාව හදාරති.
(ii) 40ක් ඉංග්‍රීසි මාධ්‍ය ගණිතය පාඨමාලාව හදාරති.
(iii) 110ක් ඉංග්‍රීසි මාධ්‍යයේ පාඨමාලා හදාරති.
(iv) ගණිතය පාඨමාලාව හදාරණ මුළු සංඛ්‍යාව 175කි.

(b)

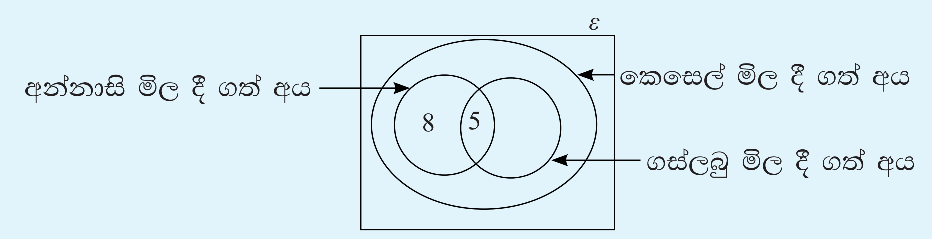
(i) සිංහල මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(ii) ඉංග්‍රීසි මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iii) සිංහල මාධ්‍ය ගණිතය පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iv) අහඹු ලෙස තෝරාගත් සිසුවකු සිංහල මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුවකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

6. එක් දිනක පලතුරු වෙළෙඳසැලකට පලතුරු මිල දී ගැනීමට පැමිණි පිරිසක් මිල දී ගත් පලතුරු වර්ග පිළිබඳ තොරතුරු පහත වෙන් රූප සටහනේ දැක්වේ. එදින අන්නාසි හෝ ගස්ලබු හෝ මිල දී ගත් සියලු දෙනාම කෙසෙල් මිල දී ගන්නා ලදී.



(i) අන්නාසි මිල දී ගත් පිරිස කොපමණ ද?

(ii) ගස්ලබු මිල දී ගත් අය 12 දෙනෙක් නම් ගස්ලබු පමණක් මිල දී ගත් අය කොපමණ ද?

(iii) කෙසෙල් මිල දී ගත් අය 40 දෙනෙක් නම් කෙසෙල් පමණක් මිල දී ගත් අය කොපමණ ද?

(iv) ඉහත ද්‍රව්‍ය කිසිවක් මිල දී නොගත් අය 10 දෙනෙක් නම් එදින පලතුරු මිල දී ගැනීමට පැමිණි පිරිස කොපමණ ද?

(v) පැමිණි මුළු පිරිසෙන් කී දෙනෙක් පලතුරු වර්ග දෙකක් පමණක් මිලදී ගත්තේ ද?

(vi) පැමිණි පිරිසෙන් අහඹු ලෙස එක් අයෙකු තෝරා ගතහොත් ඔහු වර්ග තුනම මිලදී ගත් අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

25 සම්භාවිතාව

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් පියවර දෙකකින් යුක්ත වන විට ලැබෙන සිද්ධි ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීම සඳහා
  - (i) කොටු දැල
  - (ii) රුක් සටහන

යොදා ගැනීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

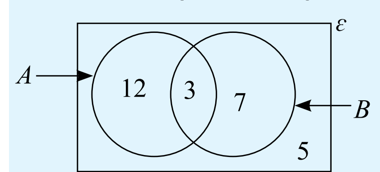
10 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ උගත් කරුණු සිහිපත් කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් S නියැදි අවකාශයක් තුළ වූ සිද්ධියක් A වේ. $n(A) = 23$, $n(S) = 50$ නම්,
(i) $P(A)$
(ii) $P(A')$
සොයන්න.

2. සසම්භාවී පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශය $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ වේ. මෙහි ප්‍රතිඵල සමසේ භව්‍ය වේ යැයි උපකල්පනය කර පහත දැක්වෙන ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.
(i) A යනු S තුළ වූ සරල සිද්ධියකි. A ලෙස ගත හැකි සිද්ධි සියල්ල ම ලියා දක්වන්න.
(ii) එම එක් එක් සිද්ධිය සඳහා $P(A)$ සොයන්න.
(iii) B යනු S තුළ වූ අවයව 4ක් ඇතුළත් සංයුක්ත සිද්ධියකි. B ලෙස ගත හැකි එක් සිද්ධියක් ලියා දක්වන්න.
(iv) $P(B)$ හා $P(B')$ සොයන්න.
(v) X යනු මෙම නියැදි අවකාශය තුළ වූ $P(X) = 0.5$ වන සිද්ධියකි. X ලෙස ගත හැකි සිද්ධි දෙකක් ලියා දක්වන්න.

3. දී ඇති වෙන් සටහනෙන් දැක්වෙන්නේ සසම්භාවී පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශයක් තුළ වූ A හා B සිද්ධි දෙකෙහි එක් එක් පෙදෙසට අයත් අවයව ගණනයි.
(a) පහත දැක්වෙන දෑ සොයන්න.



(i) $n(S)$ (ii) $P(A)$ (iii) $P(B)$
(iv) $P(A \cap B)$ (v) $P(A \cup B)$ (vi) $P(A \cap B')$
(vii) $P(A' \cap B)$ (viii) $P(A \cup B)'$

4. 1 සිට 3 දක්වා අංක යෙදූ සමාන ප්‍රමාණයේ කාඩ්පත් තුනක් අතුරින් එකක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන එහි අංකය ඔත්තේ ද නැතිනම් ඉරට්ට ද යන්න පිරික්සා එය ආපසු මල්ලට දමනු ලැබේ. ඉන්පසු තවත් කාඩ්පතක් අහඹු ලෙස ගෙන එහි අංකය ඔත්තේ ද ඉරට්ට ද යන්න පිරික්සනු ලැබේ.

(i) නියැදි අවකාශය S නම් එය කුලකයක් ලෙස ලියා $n(S)$ ලියා දක්වන්න.

(ii) A යනු වාර දෙකේ දී ම ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සිද්ධිය නම්, A කුලකයක් ලෙස ලියා $n(A)$ ලියා දක්වන්න.

(iii) එමගින් $P(A)$ සොයන්න.

(iv) S නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(v) B යනු එක් වාරයක දී පමණක් ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සිද්ධිය නම් අයත් ලක්ෂ කොටු කර දක්වා $P(B)$ සොයන්න.

(vi) S නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වා එමගින්, අඩු තරමින් එක් වාරයක දී වත් ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

25.1 ස්වායත්ත සිද්ධි හා පරායත්ත සිද්ධි

(i) ස්වායත්ත සිද්ධි

එක් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම කෙරෙහි බලනොපායි නම්, එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් ලෙස හැඳින්වෙන බව අපි 10 ශ්‍රේණියේ දී ඉගෙන ගතිමු. A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම් $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ වන බව ද අපි දනිමු. එවැනි සිද්ධි දෙකක් සඳහා නිදසුනක් පහත දැක්වේ.

කාසි දෙකක් එකවර උඩ දමා වැටෙන පැත්ත පරීක්ෂා කිරීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සලකමු. එක් කාසියක වැටෙන පැත්ත අනෙක් කාසියේ වැටෙන පැත්ත කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති නොකරන බව අපට පැහැදිලි ය. එබැවින් එක් කාසියක යම් පැත්තක් ලැබීම අනෙක් කාසියේ යම් පැත්තක් ලැබීමෙන් ස්වායත්ත වේ.

පරායත්ත සිද්ධි

එක් සිද්ධියක සිදුවීම් හෝ නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති කරයි නම් එම සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ. එනම් එක් සිද්ධියක් සිදුවීම හෝ නොවීම මත අනෙක් සිද්ධිය සිදුවීමේ හෝ නොවීමේ සම්භාවිතාවයේ වෙනසක් ඇති වෙයි.

පහත දැක්වෙන නිදසුන් අධ්‍යයනයෙන් පරායත්ත සිද්ධි පිළිබඳ ඔබගේ අවබෝධය පුළුල් කර ගන්න.

a. ක්‍රිකට් කණ්ඩායමක දක්ෂත ම පන්දු යවන්නා තරගයකට ඉදිරිපත් වීම හෝ නොවීම මත එම කණ්ඩායම ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාවේ වෙනසක් ඇති කරයි. එබැවින් දක්ෂත ම පන්දු යවන්නා තරගයට ඉදිරිපත් වීම සහ තරගය ජයග්‍රහණය කිරීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ.

b. ගැහැණු හා පිරිමි සතුන් සිටින ගව ගාලකින් අහඹු ලෙස එක් ගවයෙක් තෝරා ගතහොත් එම සතා ගැහැණු වුවහොත් කිරි ලබා ගත හැකි විය හැකි අතර ගැහැණු නොවුවහොත් ස්ථිර වශයෙන් ම කිරි ලබා ගත නොහැකි වේ. එබැවින් තෝරා ගත් ගවයා ගැහැණු වීම සහ ගවයකුගෙන් කිරි ලබාගත හැකි වීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ.

c. මල්ලක එකම තරමේ සුදු බෝල 7ක් සහ කලු බෝල 3ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් තෝරා එහි වර්ණය සටහන් කර ගෙන එය ආපසු නොදමා දෙවැන්නක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කිරීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සලකමු. පළමු බෝලය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්න ගන්නා නිසා දෙවන බෝලය ගන්නා විට මල්ලේ ඉතිරි ව ඇත්තේ මුළු බෝල 10 අතුරින් 9කි. ඒ ඒ වර්ණයෙන් ඉතිරි වන බෝල ගණන, පළමු ව ගත් බෝලයේ වර්ණය මත රඳා පවතී.

පළමු බෝලය සුදු වූයේ නම් දෙවන බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

පළමු බෝලය සුදු නොවුනා නම් දෙවන බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{7}{9}$

මෙම සම්භාවිතා දෙක අසමාන නිසා පළමු බෝලය සුදු වීම සහ දෙවන බෝලය සුදුවීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වන බව නිගමනය කළ හැකි ය.

25.2 කොටු දැල භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

පියවර දෙකකින් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක එක් පියවරක සිදුවීමක් අනෙක් පියවරෙහි සිදුවීමකින් ස්වායත්ත වන්නට හෝ පරායත්ත වන්නට පුළුවන. එසේ ස්වායත්ත වන අවස්ථාවේ දී ගැටලු විසඳීම 10 ශ්‍රේණියේ දී සාකච්ඡා කළෙමු. එය පුනරීක්ෂණය කර ගැනුමට පහත නිදසුන අධ්‍යයනය කරන්න.

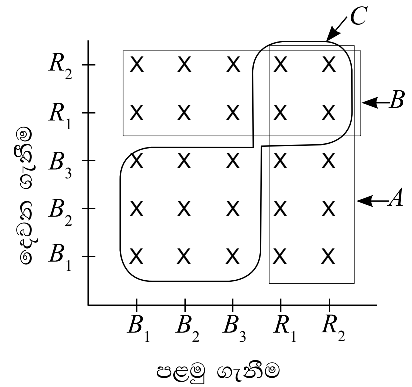
නිදසුන 1

මල්ලක එකම තරමේ නිල් පාට බෝල 3ක් ද, රතු පාට බෝල 2ක් ද ඇත. අහඹු ලෙස මින් එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කොට ගෙන ආපසු මල්ලට දමා දෙවැන්නක් ද ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරේ.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.
(ii) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) පළමු බෝලය රතු පාට වීම
(b) දෙවන බෝලය රතු පාට වීම
(c) බෝල දෙකම රතු පාට වීම
(d) බෝල දෙක එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීම
(e) අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීම

(i) සම්භාවිතා ගැටලු විසඳීමට කොටු දැල යොදා ගන්නා විට, විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල කුලකය හෙවත් නියැදි අවකාශය සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵලවලින් යුක්ත විය යුතු බව මීට පෙර අප ඉගෙන ඇත. බෝල තරමින් සමාන නිසා ඕනෑම බෝලයක් ලැබීමට ඇති සම්භාවිතාව එකම වේ. එබැවින් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වා අවශ්‍ය සම්භාවිතා සෙවිය හැකි ය. නිල් බෝල තුන B_1, B_2, B_3 ලෙස ද රතු බෝල දෙක R_1, R_2 ලෙස ද දක්වමු.



පළමු ගැනීමේ දී විය හැකි ප්‍රතිඵල තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද දෙවන ගැනීමේ දී විය හැකි ප්‍රතිඵල සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද ගෙන ලකුණු කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යවලින් නියැදි අවකාශය සමන්විත වේ.

පළමු ව ගත් බෝලය ආපසු දමා දෙවැන්න ගෙන පරීක්ෂා කරන බැවින් පළමු සිදුවීම හා දෙවන සිදුවීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත වේ.

කොටු දැල ඇසුරෙන් යම් සිද්ධියක සම්භාවිතාව සෙවීමේ දී ඇති සිද්ධියට අදාළ ලක්ෂ්‍ය ගණන, නියැදි අවකාශයේ ඇති මුළු ලක්ෂ්‍ය ගණනින් බෙදනු ලබයි.

(ii) පළමු බෝලය රතු පාට වීමේ සිද්ධියට අදාළ ලක්ෂ්‍ය දැලිසෙහි කොටු කර A ලෙස දක්වා ඇත. එහි ලක්ෂ්‍ය 10ක් ඇත. නියැදි අවකාශය තුළ ලක්ෂ්‍ය 25ක් ඇත.

$$\therefore \text{ පළමු බෝලය රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව} = \frac{A \text{ කොටුව තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(b) දෙවන බෝලය රතු පාට වීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය කොටු කර B ලෙස දක්වා ඇත.

ඒ අනුව,

$$\text{දෙවන බෝලය රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව} = \frac{B \text{ කොටුව තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(c) බෝල දෙකම රතු පාට වීමේ සිද්ධිය අදාළ ලක්ෂ්‍ය වන්නේ A හා B යන කොටු දෙකට පොදු ලක්ෂ්‍යය යි. එහි ලක්ෂ්‍ය 4ක් ඇත.

$\therefore$ බෝල දෙකම රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{\text{කොටු දෙකටම පොදු ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$

$= \dfrac{4}{25}$

(d) බෝල දෙක ම එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීමට දෙකම නිල් හෝ දෙකම රතු පාට විය යුතු ය. ඊට අදාළ ලක්ෂ C පෙදෙසේ දක්වා ඇත. එහි ඇති ලක්ෂ ගණන 13කි.

$\therefore$ බෝල දෙකම එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීමේ සම්භාවිතාව $\Big\}$ $= \dfrac{C \text{ පෙදෙස තුළ ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$

$= \dfrac{13}{25}$

(e) අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීම යනු නම් එකක් හෝ දෙකම රතු පාට වීමයි. ඊට අදාළ වන්නේ A හා B යන කොටු දෙක තුළ ඇති සියලුම ලක්ෂ්‍යයි. එහි ලක්ෂ 16ක් ඇති නිසා,

අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{16}{25}$

දැන්, පරායත්ත සිද්ධි අඩංගු පියවර දෙකකින් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් හා ඊට අදාළ සම්භාවිතා ගණනය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් සලකා බලමු.

නිදසුන 2

සිතිජගේ පැන්සල් පෙට්ටියේ රතු පැන්සල් 2ක් ද, නිල් පැන්සල් 3ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් පැන්සලක් ගෙන තම මිතුරියක වන තමිලිනීට දෙයි. ඉන්පසු සිතිජ තමාට ද පැන්සලක් අහඹු ලෙස ගනී.

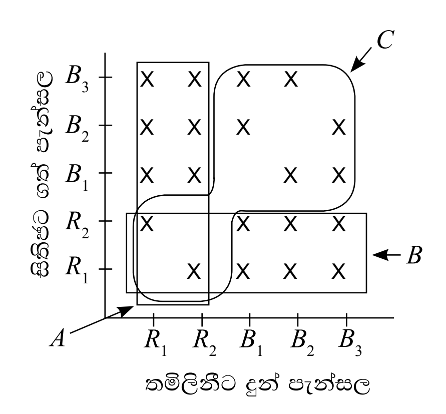
(i) නියැදි අවකාශය අවයව ඇසුරෙන් ලියා දක්වා කොටු දැලක එය දක්වන්න.
(ii) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) තමිලිනීට රතු පැන්සලක් දීම
(b) සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීම
(c) දෙදෙනාට ම එකම වර්ණයෙන් ලැබීම
(d) තමිලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීම

(i) රතු පැන්සල් දෙක R_1 හා R_2 ලෙස ද නිල් පැන්සල් තුන B_1, B_2 හා B_3 ලෙස ද ගනිමු. තමිලිනීට දුන් පැන්සල R_1, R_2, B_1, B_2 හා B_3 අතරින් එකක් ද, සිතිජට ගත් පැන්සල ද ඒ අතුරින් එකක් විය යුතු ය. එහෙත් තමිලිනීට දෙන පැන්සල සිතිජට ලැබිය නොහැකි නිසා

(R_1, R_1), (R_2, R_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2) හා (B_3, B_3) ලක්ෂ්‍යවලට අදාළ සිදුවීම් විය නොහැකි ය. එබැවින් එම ලක්ෂ්‍ය 5 හැර ඉතිරි ලක්ෂ්‍ය 20 පමණක් නියැදි අවකාශයට අයත් වේ. ඒ අනුව, අදාළ නියැදි අවකාශය ද

$\{ (R_1, R_2), (R_1, B_1), (R_1, B_2), (R_1, B_3), (R_2, R_1), (R_2, B_1)... \}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය. එය කොටු දැලක පහත රූපයේ පරිදි දැක්විය හැකිය.



(a) තමිලිනීට රතු පැන්සලක් දීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය 8ක් A කොටුව තුළ ඇත.

$\therefore$ තමිලිනීට රතු පැන්සලක් දීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(b) සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය 8 B කොටුවේ ඇත.

$\therefore$ සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(c) දෙදෙනාටම එකම වර්ණයෙන් යුත් පැන්සලක් ලැබීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය C පෙදෙසේ ඇත. එකම වර්ණය ලැබීම යනු දෙදෙනාටම රතු හෝ දෙදෙනාටම නිල් ලැබීමය. එහි දී ඇත්තේ ලක්ෂ්‍ය 8කි.

$\therefore$ දෙදෙනාටම එකම වර්ණයෙන් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

(d) තමිලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීමට නම් තමිලිනීට රතු හා සිතිජට නිල් ලැබිය යුතු ය. එවැනි ලක්ෂ්‍ය 6ක් ඇත.

$\therefore$ තමිලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

25.1 අභ්‍යාසය

1. පෙට්ටියක එකම තරමේ සුදු බෝල 2ක් හා රතු බෝල 4 ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරේ.

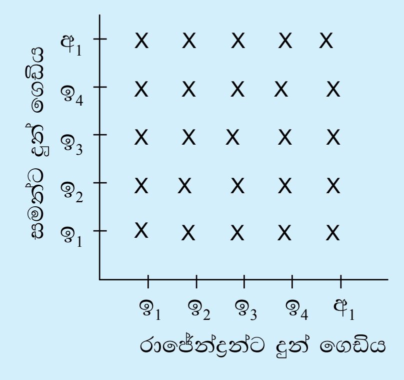
(a) විය හැකි සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් S නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න.

(b) පළමුව ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට දමා තවත් බෝලයක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරයි නම්, සමසේ භව්‍ය සරල සිද්ධි ඇතුළත් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වන්න.

(c) පළමුව ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් අහඹු ලෙස ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරන්නේ නම් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වන්න.

(d) වාර දෙකේ දී ගත් බෝල දෙක එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීමේ සම්භාවිතාව ඉහත (b) හා (c) අවස්ථා දෙක සඳහා වෙන වෙන ම සොයන්න.

2. මල්ලක එකම තරමේ ඉදුණු අඹ ගෙඩි 4 ක් සහ අමු අඹ ගෙඩි 1 ක් ඇත. අහඹු ලෙස මින් එක් ගෙඩියක් ගත් සමන් එය තම මිතුරකු වූ රාජේන්ද්‍රන්ට දෙන ලදි. ඉන්පසු සමන්ට ද ගෙඩියක් අහඹු ලෙස ගන්නා ලදී. මේ සඳහා සමන් විසින් පිළියෙල කරන ලද සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් නියැදි අවකාශයය පහත දැක්වේ.



(a) මෙම කොටු දැලේ දෝෂයක් ඇත. එය නිවැරදි කොට නැවත සකස් කරන්න.

(b) නිවැරදි කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(i) දෙදෙනාටම ඉදුණු ගෙඩි ලැබීම.
(ii) රාජේන්ද්‍රන්ට පමණක් ඉදුණු ගෙඩියක් ලැබීම.
(iii) එක් අයෙකුට පමණක් ඉදුණු ගෙඩියක් ලැබීම.

(c) මෙහි දී අඩු වශයෙන් එක් අයෙකුටවත් ඉදුණු එකක් ලැබීම ස්ථිරවම සිදුවන බව රාජේන්ද්‍රන් ප්‍රකාශ කරයි. මෙහි සත්‍ය අසත්‍යතාව හේතු සහිතව පහදන්න.

3. චාරිකාවක් යාමට සූදානම් වූ සරත් තම ඇඳුම් පෙට්ටියේ වූ සුදු කමිස 4 ක් ද, කළු කමිස 3 ක් ද අතුරින් කමිස දෙකක් (එකකට පසු එකක් වශයෙන්) අහඹු ලෙස තෝරා ගන්නා ලදී.

(a) සුදු කමිස හතර W_1, W_2, W_3, W_4 ලෙස ද කළු කමිස තුන B_1, B_2, B_3 ලෙස ද ගෙන නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(b) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) කමිස දෙකම සුදු වීම
(ii) එක් කමිසයක් පමණක් සුදු වීම
(iii) අඩු තරමින් එකක්වත් සුදු වීම

4. බඳුනක එකම තරමේ හා හැඩයෙන් යුත් කිරි රස ටොෆි 3 ක් ද, දොඩම් රස ටොෆි 2 ක් ද. සියඹලා රස ටොෆි 1 ක් ද ඇත. සඳරු මින් එක් ටොෆියක් අහඹු ලෙස ගෙන රස කර බැලුවාය. අනතුරුව තම යෙළෙියක වන ජෙසීට ද අහඹු ලෙස ගත් එකක් ප්‍රදානය කළා ය.

(a) ටොෆි රස සැලකිල්ලට ගෙන සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(b) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) දෙදෙනාටම එකම රසැති ටොෆි දෙකක් ලැබීම.
(ii) එක් අයෙකුට පමණකත් කිරි රසැති ටොෆියක් ලැබීම.
(iii) ජෙසීට සියඹලා රස ටොෆියක් ලැබීම.

25.2 රුක් සටහනක් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් පියවර කිහිපයකින් යුක්ත වන විට එම පරීක්ෂණයට අදාළ සිද්ධිවල සම්භාවිතා සෙවීමට රුක් සටහනක් භාවිතා කළ හැකි ය. අප මෙම පාඩමේ දී පියවර දෙකක් ඇති සසම්භාවී පරීක්ෂණ පමණක් සලකා බලමු. පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් ඒ පිළිබඳ ව අධ්‍යයනය කරන්න.

සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත වන අවස්ථාව ඔබ මීට පෙර 10 වසරේ දී උගෙන ඇත. එය පුනරීක්ෂණය සඳහා නිදසුනක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1

මල්ලක එකම තරමේ සුදු පාට බෝල දෙකක් ද කලු පාට බෝලයක් ද ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය පරීක්ෂා කෙරෙයි. ඉන්පසු එය ආපසු මල්ලට දමා නැවත බෝලයක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරෙයි.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සිද්ධිවල සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) පළමු ව සුදු බෝලයක් ද දෙවනුවට ද සුදු බෝලයක් ලැබීම

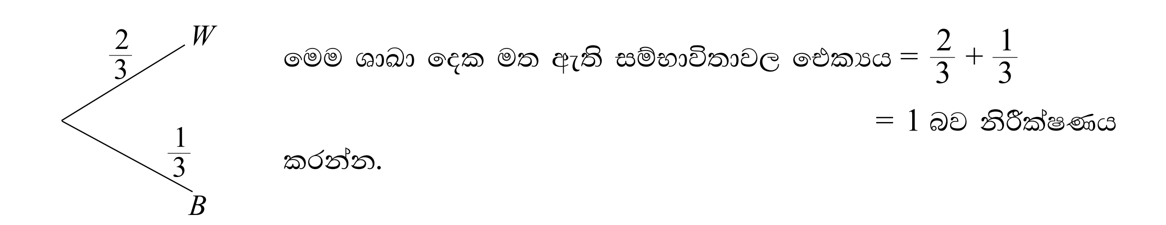
(b) පළමු ව සුදු බෝලයක් ලැබීම

(c) සුදු බෝල එකක් පමණක් ලැබීම

(d) අඩු තරමින් එක් සුදු බෝලයක්වත් ලැබීම

(i) සුදු බෝලයක් ලැබීමේ සිද්ධිය W මගින් ද, කළු බෝලයක් ලැබීමේ සිද්ධිය B මගින් ද දක්වමු. ප්‍රතිඵල සමසේ භව්‍ය නිසා, පළමු ව ගත් බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3}$ ද එය කලු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ ද වේ. පළමු ගැනීමට අදාළ රුක් සටහන් කොටසේ ශාඛා මත අදාළ සම්භාවිතා සටහන් කරමු.

<u>පළමු ගැනීම</u>

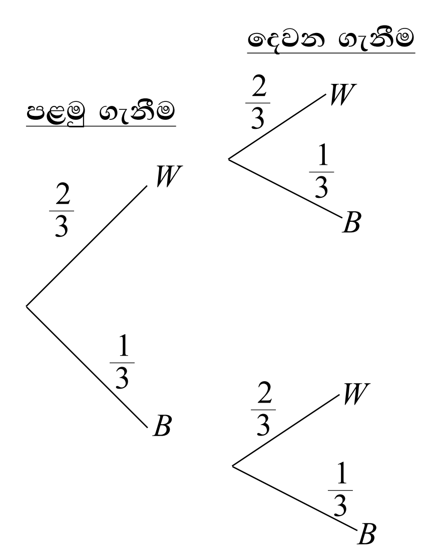


මෙම ශාඛා දෙක මත ඇති සම්භාවිතාවල ඓක්‍යය $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$= 1$ බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

සටහන: රුක් සටහනක එක් තැනකින් විහිදෙන ශාඛා මත ඇති සම්භාවිතාවල එකතුව 1 විය යුතු ය.

දැන් සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ දෙවන පියවර දක්වා ඉහත රුක් සටහන දීර්ඝ කරමු.



පළමු ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට දමා දෙවන බෝලය ගන්නා බැවින් දෙවන බෝලය ගන්නා විට ද මල්ලේ ඇති බෝල ගණන් වෙනස් නොවේ. එබැවින් දෙවනුව ගත් බෝලයක් සුදු වීමට හෝ කලු වීමට අදාළ සම්භාවිතා පළමු අවස්ථාවේ අගයන් ම ගනී. එම අගයන් අදාළ ශාඛා මත දක්වා ඇත.

මේ අවස්ථාවේ දී එක් තැනකින් විහිදෙන ශාඛා මත ඇති සම්භාවිතාවන්ගේ ඓක්‍යය ද 1 වන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

(ii) අවස්ථා දෙකම සැලකිල්ලට ගත් විට විය හැකි සිදුවීම් හතරක් ඇත. ඒවා පහත වගුවේ අදාළ සම්භාවිතා ද සමග දැක්වේ.

සිදුවීම	සම්භාවිතාව	
(W, W)	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
(W, B)	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, W)	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, B)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

නිදසුනක් ලෙස මෙහි (W, W) මගින් පළමු බෝලය සුදු වී දෙවැන්න ද සුදු වීමේ සිද්ධිය දක්වයි. එම සිද්ධියේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ වේ. මෙසේ ගුණ කිරීමට හේතුව එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත වීමයි. මෙලෙස ගෙන ඇති (W, W), (W, B), (B, W) හා (B, B) සිද්ධි හතර අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ. ඊට හේතුව වන්නේ මෙම සිද්ධි අතරින් ඕනෑම දෙකක් ගතහොත් එම සිද්ධි දෙක එකවර සිදු විය නොහැකි වීම යි. අදාළ සිද්ධීන්ගේ සම්භාවිතා පහත දැක්වෙන පරිදි ගණනය කළ හැකි ය.

(a) පළමු ව සුදු බෝලයක් ද දෙවනුව ද සුදු බෝලයක් ද ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(W, W)$$

$$= \frac{4}{9} \text{ (වගුව ඇසුරෙන්)}$$

(b) පළමුව සුදු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, W) + P(W, B)$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(c) සුදු බෝල 1ක් පමණක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, B) + P(B, W)$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(d) අඩු තරමින් එක් සුදු බෝලයක්වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, W) + P(W, B) + P(B, W)$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{2} = \frac{8}{9}$$

සටහන: (d) කොටසේ පිළිතුර $1 - P(B, B)$ ලෙස ද ලබා ගත හැකි ය.

සිද්ධි දෙක පරායත්ත වන අවස්ථාවට නිදසුනක් පහත දක්වමු.

නිදසුන 2

මල්ලක එකම තරමේ රතු බෝල 3ක් හා නිල් බෝල 2ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය පරීක්ෂා කර එය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරයි.

(i) අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

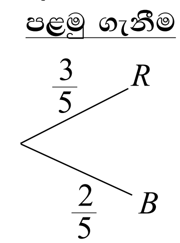
(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සිද්ධිවල සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) අවස්ථා දෙකේ දී ම රතු බෝලයක් ලැබීම

(b) එක් අවස්ථාවක දී පමණක් රතු බෝලයක් ලැබීම

(c) අඩු තරමින් එක් අවස්ථාවක දී වත් රතු බෝලයක් ලැබීම

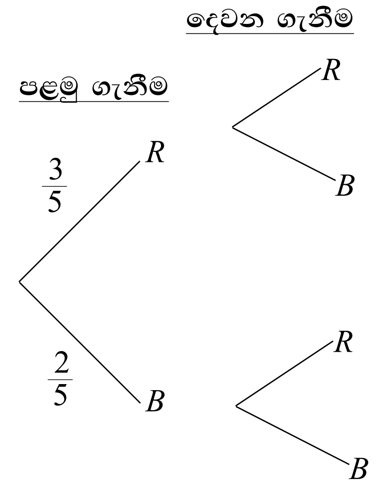
(i) රුක් සටහනේ මුල් කොටස පහත දැක්වේ.



මෙහි R මගින් රතු බෝලයක් ලැබීම ද B මගින් නිල් බෝලයක් ලැබීම ද දැක්වේ. මල්ලේ රතු බෝල 3ක් ද නිල් බෝල 2ක් ද ඇති නිසා,

$P(R) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ වේ.

දැන් රුක් සටහනේ මුල් කොටස දීර්ඝ කිරීමෙන් දෙවන ගැනීමට අදාළ සිදුවීම් දක්වමු.



ඉහත රුක් සටහනේ දෙවන පියවරට අදාළ සම්භාවිතා සෙවූ අයුරු මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.

මෙම කොටසේ ශාඛා මත දක්වන සම්භාවිතා මුල් කොටසේ අගයන්ගෙන් වෙනස් වේ. එසේ වන්නේ පළමු සිදුවීම සලකා දෙවන සිදුවීමට අදාළ සම්භාවිතා සෙවිය යුතු නිසා ය. පළමු බෝලය රතු වූවා නම්, මල්ලේ ඉතිරි වන්නේ රතු බෝල 2ක් හා නිල් බෝල 2කි.

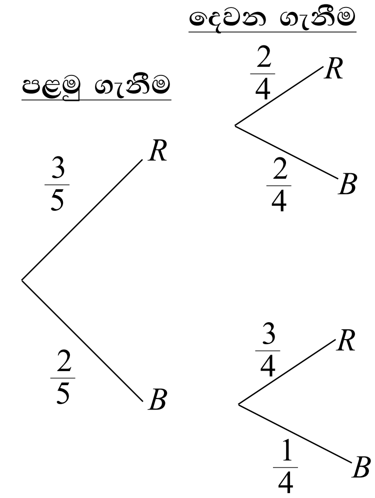
$\therefore$ දෙවැන්න රතු වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{2}{4}$

දෙවැන්න නිල් වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{2}{4}$

පළමු බෝලය නිල් වූවා නම්, මල්ලේ ඉතිරි වන්නේ රතු බෝල 3ක් හා නිල් බෝල 1කි.

$\therefore$ දෙවැන්න රතුවීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{3}{4}$

දෙවැන්න නිල්වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{1}{4}$



මෙම සම්භාවිතාවන් රුක් සටහනේ අදාළ ශාඛා මත සටහන් කර සිදුවීම් වගුව සම්පූර්ණ කරමු. එම සිද්ධීන් හතරේ සම්භාවිතාවන්ගේ එකතුව 1 වන බව තහවුරු කර ගන්න.

සිදුවීම	සම්භාවිතාව	
(R, R)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(R, B)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, R)	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, B)	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$

වගුවෙහි, නිදසුනක් ලෙස (R, R) සිද්ධියට (එනම්, මුලින් රතු බෝලයක් ලැබීම හා දෙවනුවත් රතු බෝලයක් ලැබීම යන සිද්ධියට) අදාළ සම්භාවිතාව ගණනය කර ඇත්තේ අදාළ සම්භාවිතා ගුණ කිරීමෙනි. එසේ නමුත් එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත නොවේ. එයට හේතුව, මුලින් ගන්නා බෝලයෙහි වර්ණය රතු වීම හෝ නොවීම අනුව දෙවනුව ගන්නා බෝලය රතු වීමේ සම්භාවිතාව වෙනස් වන නිසා ය. එසේ නමුත් දෙවනුව ගන්නා බෝලයෙහි වර්ණය රතු වීමේ සම්භාවිතාව සෙවීමේ දී පළමුව ගත් බෝලයෙහි වර්ණය රතු ලෙස ගෙන ඇති නිසා මෙසේ (R, R) හි සම්භාවිතා සෙවීමේ දී අදාළ සම්භාවිතා ගුණ කළ හැකි ය.

මෙම වගුවේ දැක්වෙන $(R,R), (R,B), (B,R), (B,B)$ සිදුවීම් අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ. එබැවින් රුක් සටහන ඇසුරෙන් යම් සිද්ධියක සම්භාවිතාව සෙවීමට අප කළ යුතු වන්නේ වගුව තුළින් ඊට අදාළ සිදුවීම් තෝරා ගෙන එම සිද්ධිවල සම්භාවිතාවන්ගේ ඓක්‍යය ලබා ගැනීමයි.

(a) අවස්ථා දෙකේ දී ම රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P\,(R, R)$

$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(b) එක් අවස්ථාවක දී පමණක් රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P\,(R, B) + P\,(B, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

(c) අඩු තරමින් එක් අවස්ථාවක දී වත් රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P\,(R, B) + P\,(B, R) + P\,(R, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

සටහන: (c) කොටසේ පිළිතුරු මෙය $1 - P\,(B, B)$ මගින් ද ලබා ගත හැකි ය.

25.2 අභ්‍යාසය

1. එකම වර්ගයේ බල්බ 10 ක් ඇති පෙට්ටියක බල්බ 3 ක් සදොස් බව දනියි. නිමල් පෙට්ටියෙන් එක් බල්බයක් අහඹු ලෙස ගෙන සදොස් දැයි පරීක්ෂා කොට එය ආපසු නො දමා දෙවැනි බල්බයක් අහඹු ලෙස ගෙන පරීක්ෂා කරයි.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) පළමු ව සදොස් බල්බයක් ලැබීම හා දෙවනුව ද සදොස් බල්බයක් ලැබීම යන සිද්ධි යුගලය පරායත්ත වන බව නිමල් පවසයි. එහි සත්‍ය අසත්‍යතාව හේතු සහිතව පැහැදිලි කරන්න.

(iii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) ගත් බල්බ දෙකම සදොස් ඒවා වීම

(b) ගත් එක් බල්බයක් පමණක් සදොස් වීම

(c) යටත් පිරිසෙයින් එක් බල්බයක්වත් සදොස් වීම

2. පාපන්දු කණ්ඩායමක සිටින A නම් ක්‍රීඩකයෙක් එක්තරා තරගයකට ක්‍රීඩා කිරීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{4}$ කි. A ක්‍රීඩකයා එම තරගයට ක්‍රීඩා කළහොත් තරගයෙන් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{5}{8}$ ක් වන අතර, ක්‍රීඩා නොකළහොත් ජය ලැබීම සහ පරාජය වීම සමසේ භව්‍ය වේ. මෙම තරගය ජය පරාජයෙන් තොරව නිම නොවේ.

(i) A නම් ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා නොකිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) A ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා නොකළහොත් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) A ක්‍රීඩකයා ක්‍රීඩා කිරීම හා නොකිරීම පළමු කොටසට තරගයෙන් ජය ලැබීම හා පරාජය වීම දෙවන කොටසට ද ගෙන නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(iv) රුක් සටහන ඇසුරෙන් මෙම පාපන්දු කණ්ඩායම තරගයෙන් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(v) A ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා කිරීම වඩා වාසිදායක වන්නේ දැයි හේතු සහිත ව දක්වන්න.

3. මල්ලක එකම තරමේ ඉදුණු දිවුල් ගෙඩි 4ක් ද නොඉදුණු දිවුල් ගෙඩි 3ක් ද ඇත. නාමලී මින් එක් ගෙඩියක් අහඹු ලෙස ගෙන එය ඉදුණු එකක් නම් එය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ. එය නොඉදුණු එකක් නම් එය ආපසු මල්ලට දමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) නාමලීගේ පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශයන්ගෙන් කුමන ඒවා සත්‍ය දැයි හේතු සහිතව දක්වන්න.

(a) "පළමු ව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම සහ දෙවනුව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකකි"

(b) "පළමු ව ගත් ගෙඩිය නොඉදුණු එකක් වීම හා දෙවනුව ගත් ගෙඩිය නොඉදුණු එකක් වීම පරායත්ත සිද්ධි දෙකකි".

(iii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) ගත් ගෙඩි දෙකම ඉදුණු ඒවා වීම

(b) දෙවනුව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම

(c) ගත් ගෙඩි දෙකින් එකක් පමණක් ඉදුණු ඒවා වීම

4. සිරිමල්ගේ ගවගාලේ පිරිමි සතුන් 5ක් ද ගැහැණු සතුන් 15ක් ද සිටී. නාදන්ගේ ගවගාලේ පිරිමි සතුන් 2ක් ද ගැහැණු සතුන් 8ක් ද සිටී. සිරිමල් හා නාදන් එක් සතෙකු බැගින් හුවමාරු කර ගැනීමට එකඟ විය. පළමු ව සිරිමල් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් සතෙක් නාදන්ට යැවූ පසු නාදන් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් සතෙක් සිරිමල්ට යවන ලදී.

(i) අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
(ii) එය ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.
(a) හුවමාරුව නිසා සිරිමල්ගේ ගාලේ පිරිමි සතෙක් අඩු වීම
(b) හුවමාරුව නිසා සිරිමල්ගේ ගාලේ පිරිමි සතෙක් වැඩි වීම
(c) හුවමාරුව නිසා ගාල් දෙකෙහි පිරිමි හා ගැහැණු සතුන් ගණන වෙනස් නොවීම
(iii) ඉහත විස්තර කර ඇති ආකාරයට නොව වෙනත් ආකාරයකට ඔවුන් දෙදෙනා සතුන් හුවමාරු කළෝ ය. සිරිමල් හා නාදන් තම ගාල්වලින් සතෙක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන මිත්‍ර අබ්දුල්ගේ නිවසට ගොස් එහිදී සතුන් දෙදෙනා හුවමාරු කර ගෙන ගව ගාල්වලට මුදා හැරියේ නම් එම සසම්භාවී පරීක්ෂණයට අදාළ ව ඉහත (ii) කොටසේ අසා ඇති සම්භාවිතාව සොයන්න.

5. X හා Y යනු එකම රෝගයක් සඳහා දෙනු ලබන සඵලත්ව පිළිවෙළින් 90% හා 80%ක් වන ඖෂධ දෙකකි. එක් ඖෂධයකින් සුව නොවුනහොත් පමණක් අනෙක් ඖෂධය දෙනු ලැබේ. එය ද සාර්ථක නොවුනහොත් ශල්‍යකර්මයකට භාජනය කරනු ලැබේ.

(i) ඖෂධ වර්ග දෙකම ලබා දීමෙන් පසු රෝගය සුවවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) රෝගියෙක් ශල්‍ය කර්මයකට යොමු කිරීමට සිදුවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(iii) මුලින් ම ලබා දෙන ඖෂධය X ද Y ද යන්න මත (ii) කොටසේ පිළිතුර වෙනස් වන ආකාරය පිළිබඳව සාකච්ඡා කරන්න

6. ආයතනයක සේවය කරනු ලබන ලිපිකාර තනතුර හා කම්කරු තනතුර දරන්නන්ගේ පුම්තිරි බව පහත වගුවේ දැක්වේ.

තනතුර \ පුම්තිරිබව	පිරිමි	ගැහැණු	එකතුව
ලිපිකරු	5	8	13
කම්කරු	2	1	3
එකතුව	7	9	16

(i) මෙම ආයතනයෙන් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් අයෙක්,

(a) කම්කරු තනතුරු දරන්නෙක් වීමේ
(b) ලිපිකාරිනියක වීමේ
(c) ගැහැණු අයෙක් වුණි නම් ඇය කම්කරු තනතුර දරන්නෙක් වීමේ
සම්භාවිතා සොයන්න.

(ii) මෙම ආයතනයෙන් අහඹු ලෙස ලිපිකාර තනතුර දරන්නෙකු හා කම්කරු තනතුර දරන්නෙක් තෝරා ගනී.

(a) විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල රුක් සටහනක දක්වන්න.
(b) ඒ ඇසුරෙන් තෝරා ගත් දෙදෙනා අතුරින් එක් අයෙක්වත් පිරිමි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

7. පෙට්ටියක එකම තරමේ සුදු බෝල 2ක් ද, කලු බෝල 1ක් ද ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන එය ඉවතට දමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ. මෙසේ ගත් බෝල දෙක අතරින් අඩු තරමින් එකක්වත් සුදු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

8. A නම් පෙට්ටියක එකම ප්‍රමාණයේ හා හැඩයේ නිල් පබළු 3 ක් ද රතු පබළු 2 ක් ද ඇත. B නම් පෙට්ටියේ එකම ප්‍රමාණයේ හා හැඩයේ නිල් පබළු 4 ක් ද රතු පබළු 5 ක් ද ඇත. A පෙට්ටියේ පබළු වක් ගෙන B පෙට්ටියට දමා B පෙට්ටියෙන් පබළුවක් ගෙන A පෙට්ටියට දමනු ලැබේ. එවිට A පෙට්ටියේ පබළුවල වර්ණ සංයුතිය වෙනස් නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

9. එක්තරා මහා විද්‍යාලයක 11 ශ්‍රේණියේ සමාන්තර පන්ති තුනක් ඇත. මෙම පන්ති තුනෙහි ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යා 2: 2: 3 අනුපාතයට ඇත. පන්ති තුනට ගණිතය උගන්වන්නේ A, B හා C යන ගුරුවරු තිදෙනෙකි. විදුහල්පති තුමා තම විශ්වාසය මත පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශය කරයි. " A උගන්වන පන්තියෙන් 90%ක් ද, B උගන්වන පන්තියෙන් 80% ක් ද C උගන්වන පන්තියෙන් 60% ක් ද, සිසුන් ඉදිරියේ පැවැත්වීමට නියමිත විභාගයෙන් සමත් වේ". මෙම ප්‍රකාශයට අනුව,

(i) එම පාසලේ 11 ශ්‍රේණියෙන් අහඹු ලෙස තෝරා ගන්නා සිසුවෙකු විභාගයෙන් සමත් අයෙක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) ඉහත කොටසේ පිළිතුර මත සමත් ප්‍රතිශතය තක්සේරු කරන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස - 3 වන වාරය

I කොටස

1. පහත දැක්වෙන අසමානතාව විසඳා, විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කර දක්වන්න.

$2x + 5 \leq 15$

2. දී ඇති වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කොට ඇති ප්‍රදේශය කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.

3. සෘජුකෝණික සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳි සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය 64 cm^2 වේ. ඉතිරි පාදයක් මත ඇඳි සමචතුරස්‍රයක වර්ගඵලය සොයන්න.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ q \end{pmatrix}$ නම් p හා q සොයන්න.

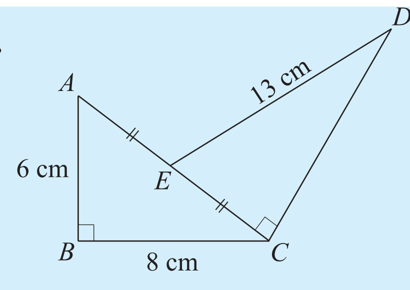
5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ පරිධිය මත පිහිටි A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක රූපයේ ආකාරයට P, Q, R හා S හි දී එකිනෙක හමු වේ. $PQ + SR = 20$ cm නම් $PQRS$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

6. A හා B යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි දෙකක් වන අතර $P(A) = 0.4$ ද $P(A \cup B) = 0.7$ ද වේ. A හා B ස්වායත්ත නම් $P(B)$ හි අගය සොයන්න.

7. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ $C\hat{O}D = 70^\circ$ ද $C\hat{B}A = 100^\circ$ ද වේ. $O\hat{D}A$ හි අගය සොයන්න.

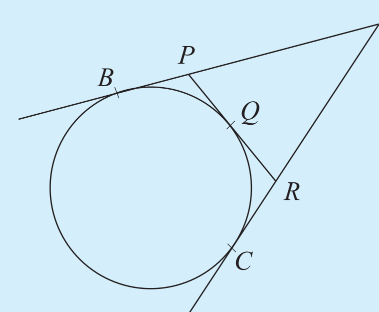
8. රූපයේ දැක්වෙන $ABCG$ හා $FCDE$ යනු සමචතුරස්‍ර වේ. $AC^2 = 12 \text{ cm}^2$ ද $CE^2 = 6 \text{ cm}^2$ නම් රූපයේ මුළු වර්ගඵලය සොයන්න.

9. රූපයේ දැක්වෙන ABC හා ECD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ. රූපයේ මුළු වර්ගඵලය සොයන්න.



10. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ නම් $-2A$ න්‍යාසය ලියා දක්වන්න.

11. දී ඇති රූපයේ, A සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක යුගලය AB හා AC වේ. Q හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය AB හා AC පාද P හා R හිදී හමු වේ. APR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 18 cm වේ නම් AB දිග සොයන්න.



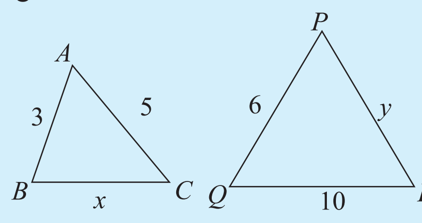
12. හිස්තැනට සුදුසු ත්‍රිකෝණ වර්ගය සුළුකෝණී ද, සෘජුකෝණී ද, මහා කෝණී ද යන්න ලියන්න.

(a) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය පාදයක් මත පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

(b) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයෙන් පිටත පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

(c) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

13. ABC හා PQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණනම් x හා y සොයන්න.



14. $4x + 3 \geq 8$ අසමානතාව සපුරාලන x හි නිඛිලය විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

15. $y = x^2 + 5x + 9$ ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොරව ලියා දක්වන්න.

II කොටස

1. ABC ඍජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 90^\circ$ වේ.

(i) P යනු BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය විට $4(AP^2 - AB^2) = BC^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) Q යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය විට $4(CQ^2 - BC^2) = AB^2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) ඉහත ලබාගත් (i) හා (ii) ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $4(AP^2 + CQ^2) = 5\,AC^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iv) ඉහත ABC ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් විට (iii) හි ලබාගත් ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $AP:QP = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

2. (a) $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයකි. ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතයෙන්,

(i) AE දිග සොයන්න.

(ii) $BCDE$ ත්‍රැපීසියමේ පරිමිතිය ගණනය කරන්න.

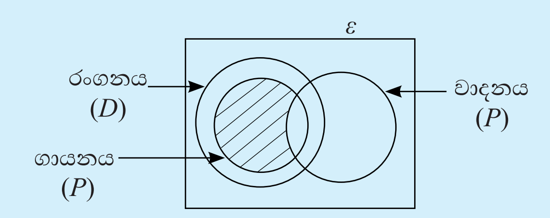
(b) A, B, C නම් නගර තුන පිහිටා ඇත්තේ A නගරයේ සිට දිගංශය 040° හා 50 km දුරින් B නගරය ද, B නගරයේ සිට දිගංශය 270° ක් හා Aට හරි උතුරින් C නගරය ද පිහිටන පරිදි ය.

(i) සුදුසු දළ රූපයක් ඇඳ ඉහත දක්වන ලද තොරතුරු එහි ලකුණු කරන්න.

(ii) A නගරයේ සිට C නගරයට දුර සොයන්න.

(iii) මෙම නගර තුනට ම ජලය සැපයීම සඳහා ජලය එක් රැස්කළ හැකි විශාල ජල ටැංකියක් සහිත කුළුණක් ඉදිකිරීමට අවශ්‍ය ව ඇති අතර කුළුනේ සිට එක් එක් නගරය වෙත ජලය සපයන ජලනලවල දිග සමාන වන පරිදි එය ඉදිකිරීමට සුදුසු ස්ථානය ඉහත රූපයේ T ලෙස නම් කර දක්වන්න.

3. සිසුන් 160ක් සහභාගී වූ සංදර්ශනයකට දායකත්වය දුන් සිසුන් පිළිබඳ තොරතුරු පහත දැක්වේ.



චාරිකාවට සහභාගී වූ මුළු පිරිසෙන් $\frac{1}{4}$ ක් රංගනය, වාදනය හා ගායනය යන අංශවලින් එක් අංශයකට හෝ සහභාගී වූහ. වාදනයට හා රංගනයට සහභාගී වූ 16 දෙනෙකු අතුරින් 6 දෙනෙකු ගායනයට ද සහභාගී විය. වාදනයට පමණක් සහභාගී වූ අය මෙන් දෙගුණයක් ගායනය හා රංගනයට පමණක් ද, පස්ගුණයක් රංගනයට පමණක් ද සහභාගී වූහ.

මෙහි ඉදිරිපත් කර ඇති වෙන්රූප සටහන ඔබේ අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කර අදාළ ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(i) ඉහත තොරතුරු වෙන් රූප සටහන තුළ නිවැරදි ව සටහන් කරන්න. රංගනය, ගායනය හා වාදනය යන අංශ තුනට ම සහභාගී වූ පිරිස කොපමණ ද?

(ii) වාදනයට පමණක් සහභාගී වූ පිරිස කොපමණ ද?

(iii) එක් අංගයකට පමණක් සහභාගී වූ පිරිස මුළු පිරිසෙන් භාගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(iv) $(S' \cap D) \cap P$ මගින් නිරූපණය වන කුලකයට අයත් පිරිස කුමන අංගයක් සඳහා සහභාගී වුයේ දැයි විස්තර කරන්න. එම සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

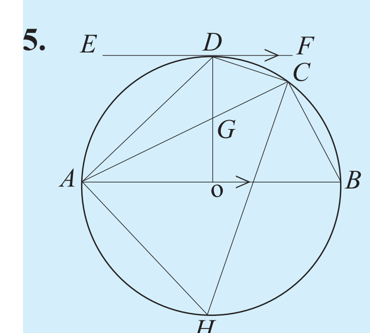
(v) වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශය අදාළ සංකේත හා කුලක අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

4. A හා B භාජන දෙකකට වර්ණය අසමාන සර්වසම බෝල දමා ඇත. A භාජනයේ කළු බෝල 3ක් ද, සුදු බෝල 2ක් ද ඇත. B භාජනයේ කළු බෝල 2 හා සුළු බෝල 3ක් ඇත. පුද්ගලයෙකු A භාජනයෙන් බෝලයක් ගෙන B භාජනයට දමා දෙවනුව B භාජනයේ බෝලයක් ඉවතට ගනී.

(i) ඉහත සිදුවීම්වලට අදාළ සම්භාවිතා දැක්වෙන රුක් සටහන අඳින්න.

(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් වාර දෙකේ දී ම එකම වර්ණයෙන් යුත් බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

5.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ AB යනු විෂ්කම්භයකි. වෘත්තයට D හි දී ඇඳි EF ස්පර්ශකය AB ට සමාන්තර වේ.

(i) $A\hat{B}D$ ට සමාන කෝණ දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ii) $E\hat{D}O$ හි අගය සොයන්න.

(iii) $OBCG$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

6. කවකටුව, mm/cm පරිමාණය සහිත සරල දාරය භාවිත කර නිර්මාණ රේඛා පැහැදිලි ව දක්වමින්,

(i) $AB = 8$ cm, $A\hat{B}C = 90^\circ$ ද $BC = 4$ cm වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) $DC = 2$ cm හා DC හා AB සමාන්තර වන පරිදි $ABCD$ ත්‍රැපීසියම නිර්මාණය කරන්න.

(iii) දික්කරන ලද CB පාදය D හි දී ද CA පාදය E හි දී ද AB පාදය F හි දී ද බාහිරින් ස්පර්ශ කරන වෘත්තය ඇඳ දක්වන්න.

(iv) CD හා CE දිග අතර සම්බන්ධය ලියා එසේ වීමට හේතුව පැහැදිලි කරන්න.

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	.0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23	26
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	.1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.334	.1363	.1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	.1564	81	3	6	9	11	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	.1736	80°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
10°	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	.2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	.2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	.2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	.2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	.2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	.3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	.3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	.3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	.3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	.3907	67	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	.4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	.4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	.5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	.6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	.6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	.6428	50°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6848	.6905	.6926	.6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	.7071	45	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465	.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	.8660	30°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261	.9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	.9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	(අන්තරය ඉතා කුඩා බැවින් වගු ගත කිරීම අනවශ්‍යය.)								
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	.0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846	.0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84	3	6	9	12	15	18	21	24	26
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198	.1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376	.1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554	.1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733	.1763	80°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.1944	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	0.2095	0.2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278	.2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462	.2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	.2493	.2524	.2555	.2586	.2617	.2648	.2679	75	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026	.3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	.3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607	.3640	70°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30°	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766	.7813	52	5	9	14	19	23	28	32	37	42
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050	.8098	51	5	10	14	19	24	29	33	38	43
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342	.8391	50°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952	.9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	58	65
51	.2349	.2423	.2497	.2572	.2647	.2723	.2799	38	8	15	23	30	38	45	53	60	68
52	.2799	.2876	.2954	.3032	.3111	.3190	.3270	37	8	16	24	31	39	47	55	63	71
53	.3270	.3351	.3432	.3514	.3597	.3680	.3764	36	8	16	25	33	41	49	58	66	74
54	.3764	.3848	.3934	.4019	.4106	.4193	.4281	35	9	17	26	35	43	52	60	69	78
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733	1.4826	34	9	18	27	36	45	54	63	73	82
56	.4826	.4919	.5013	.5108	.5204	.5301	.5399	33	10	19	29	38	48	57	67	76	86
57	.5399	.5497	.5597	.5697	.5798	.5900	.6003	32	10	20	30	40	50	60	71	81	91
58	.6003	.6107	.6212	.6319	.6426	.6534	.6643	31	11	21	32	43	53	64	75	85	96
59	.6643	.6753	.6864	.6977	.7090	.7205	.7321	30°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	2	4	6	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20°	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13	5	11	16	21	27	32	37	43	48
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12	6	12	19	25	31	37	44	50	56
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11	7	15	22	29	37	44	51	59	66
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10°	9	18	26	35	44	53	61	70	79
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7									
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6									
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5									
85	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73	14.30	4									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07	19.08	3									
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43	28.64	2									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10	57.29	1									
89	57.29	68.75	85.94	114.59	171.89	343.77	∞	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

For 80°–89°, in place of mean differences:

අන්තර ශීඝ්‍රයෙන් වෙනස් වෙයි

வித்தியாசங்கள் விரைந்து மாறுவன

Differences change rapidly

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS

අ

අසමානතා	சமனிலிகள்	Inequalities
අනුමේයයන්	ஏறிகள்	Riders
අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය	அகத்தெதிர் கோணம்	Interior opposite angle
අරය	ஆரை	Radius
ආපාතිත	எதிரமை	Subtended
අවයව	மூலகம்	Element
අන්තර්වෘත්තය	உள்வட்டம்	Inscribed circle

ඒ

ඒකක න්‍යාසය	அலகுத் தாயம்	Unit matrix
ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය	ஒரேதுண்டக் கோணங்கள்	Angles in the same segment

සෘ

සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ	செங்கோண முக்கோணம்	Right angled triangles

ක

කර්ණය	செம்பக்கம்	Hypotenuse
කෝසයිනය	கோசைன்	Cosine
කේන්ද්‍රය	மையம்	Centre
කුලකය	தொடை	Set
කුලක ඡේදනය	தொடைகளின் இடைவெட்டு	Intersection of sets
කුලක මේලය	தொடைகளின் ஒன்றிப்பு	Union of sets
කොටු දැල	நெய்யரி	Grid

ජ

ජ්‍යාය	நாண்	Chord

ට

ටැංජනය	தொடலி	Tangent

ත

ත්‍රිකෝණමිතිය	திரிகோண கணிதம்	Trignometry
ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	திரிகோண கணித விகிதங்கள்	Trignometric Ratios
තීර න්‍යාසය	நிரற் தாயம்	Column matrix

න

න්‍යාස	தாயங்கள்	Matrices
න්‍යාසයේ ගණය	தாயத்தின் வரிசை	Order of a matrix
න්‍යාසයක අවයව	தாயமொன்றின் மூலகங்கள்	Elements of a matrix
නියැදි අවකාශය	மாதிரிவெளி	Sample space

ප

පයිතගරස් ප්‍රමේයය	பைதகரசின் தேற்றம்	Pythagoras' theorem
පයිතගරස් ත්‍රික	பைதகரசின் மும்மை	Pythagoras' triple
පේළි න්‍යාසය	நிரைத் தாயம்	Row matrix
පරිපූරක	மிகை நிரப்புகின்ற	Supplementary
පථය	ஒழுக்கு	Locus
පරිවෘත්තය	சுற்று வட்டம்	Circumcircle
පරායත්ත සිද්ධි	சார் நிகழ்ச்சி	Dependent Events

බ

බද්ධ පාදය	அயற் பக்கம்	Adjacent side
බාහිර කෝණය	புறக்கோணம்	Exterior angle
බාහිර ලක්ෂ්‍යය	புறப்புள்ளி	Exterior point
බාහිර වෘත්තය	வெளி வட்டம்	Outer Circle



රුක් සටහන	மரவரிப்படம்	Tree Diagram



ලම්බකය	செங்குத்து	Perpendicular
ලක්ෂ්‍යය	புள்ளி	Point



විසඳුම් කුලකය	தீர்வுத் தொடை	Solution set
වෘත්ත චතුරස්‍ර	வட்ட நாற்பக்கல்	Cyclic Quadrilateral
වෘත්තය	வட்டம்	Circle
වෘත්ත ඛණ්ඩය	வட்டத்துத்துண்டம்	Segment of a circle
වෙන් රූපය	வென் வரிப்படம்	Venn diagram

ස

සම්මුඛ පාදය	எதிர்ப் பக்கங்கள்	Opposite side
සයිනය	சைன்	Sine
සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය	சதுரத் தாயம்	Square matrix
සමමිතීය න්‍යාසය	சமச்சீர்த் தாயம்	Symmetric matrix
සම්මුඛ කෝණ	எதிர்க் கோணங்கள்	Opposite angles
ස්පර්ශකය	தொடலி	Tangent
සසම්භාවී පරීක්ෂණ	எழுமாற்றுப் பரிசோதனை	Randam Experiments
ස්වායත්ත සිද්ධි	சாரா நிகழ்ச்சிகள்	Independent events